平成 30 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：生産工学･制御工学　［ 1 / 2 ］

（問題[1]と[2]は，別々の答案用紙に解答すること）

[1]　以下の問い(1), (2), (3)に答えよ．

(1) 3D プリンタの長所と短所を 3 つずつ挙げよ．

(2) 加工硬化について，どのような現象なのか，そして，なぜ起きるのか説明せよ．

(3) 図 1 は，第 3 角法を用いて，ある立体構造物を描いたものである．平面図と右側面図が図のようであるときに，正面図としてあり得る図形を 2 種類描け．なお，この立体構造物の表面は，平面で構成されているとする．

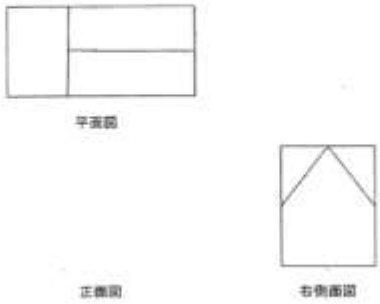


図 1

2018（H30）年度　⑤生産工学　問題

【1】（1）〈3D プリンタ〉

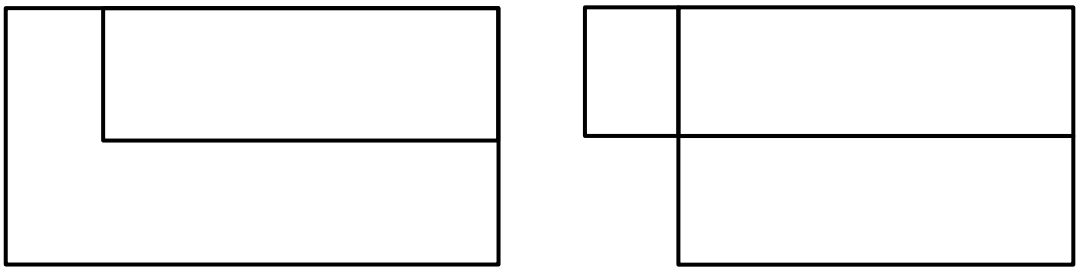
（1）3D プリンタの長所と短所を 3 つずつ挙げよ。
〈長所〉 i．複雑な形状を作れる　ii．一発造形ができる　iii．製造時間が短い 〈短所〉 i．使用できる材料が限られる　ii．寸法精度が悪い　iii．材料のコストが高い

【1】（2）〈加工硬化〉

（2）加工硬化について、どのような現象なのか。そして、なぜ起きるのか説明せよ。
金属状態が常温で塑性変形を受けると、ひずみが増加して変形抵抗が増す状態 〈理由〉結晶のすべりが起きにくくなり、転位の移動が妨げられるから。

【1】（3）〈第 3 角法〉

（3）図 1 は第 3 角法を用いて、ある立体構造物を描いたものである。平面図と右側面図が図のようであるときに、正面図としてあり得る図形を 2 種類描け。
なお、この立体構造物の表面は、平面で構成されているものとする。



2018（H30）年度【1】講評

（1）製造プロセス工学Ⅰの範囲からの出題。付加製造：3D プリンタ。
（2）製造プロセス工学Ⅰの範囲からの出題。鍛造。
（3）製図法。機械製図の講義や設計演習の実習を思い出す。

平成 30 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：生産工学･制御工学　［ 2 / 2 ］

(問題 [1], [2]は別々の答案用紙に解答すること.)

[2] 以下の問(1), (2)に答えよ.

(1)図 2-1 に示す水位系を考える. タンクi $(i = 1,2)$の水位を$h_i(t)$[m], 底面積をS_i [m²]とする. また, 各タンクへの時間あたりの流入量を$q(t)$[m³/s]とする. タンクiからの時間あたりの流出量は定数$c_i > 0$を用いて$c_i\sqrt{h_i(t)}$[m³/s]で与えられる.

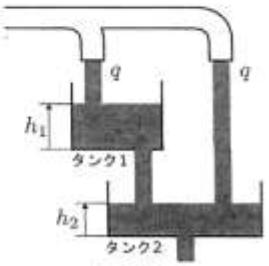


図 2-1

(a) $h_1(t), h_2(t), q(t)$に関する微分方程式を求めよ.

(b) 流入量を一定量$\bar{q}$に維持したとき, 各タンクの水位が平衡状態に達した. このときの各タンクの水位$\bar{h}_1, \bar{h}_2$を求めよ.

(c) 流入量および各タンクの水位を平衡状態からの偏差として $q(t) = \bar{q} + u(t)$, $h_1(t) = \bar{h}_1 + x_1(t)$, $h_2(t) = \bar{h}_2 + x_2(t)$ とおく. 近似線形化により $x_1(t), x_2(t), u(t)$に関する状態方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + Bu(t) \qquad \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

の係数行列A, Bを求めよ.

(d) 以下の二つの場合について可観測性行列のランクを求め, 可観測性を判定せよ.

i) 観測出力を $y(t) = x_1(t)$ とする場合

ii) 観測出力を $y(t) = x_2(t)$ とする場合

(2) 図 2-2 に示すフィードバック系を考える.

(a) フィードバック系の伝達関数を求めよ.

(b) フィードバック系のインパルス応答が振動的となるKの範囲を求めよ.

(c) Kを0から∞へ変化させた際のフィードバック系の根軌跡の概形を描け, 軌跡の向きおよび代表的な点における極の値を記すこと.

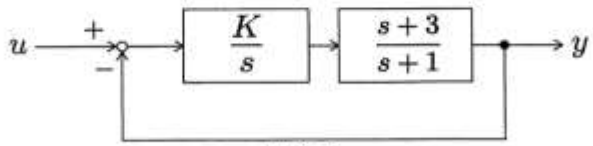


図 2-2

2018（H30）年度　⑤制御工学　問題

【２】問題〈現代制御：水位系〉

（１）図１に示す水位系を考える。

タンク $i\ (i=1,2)$ の水位 $h_i(t)$ [m], 底面積を $S_i(t)$ [m^2] とする。

また、各タンクへの時間あたりの流入量を $q(t)$ [m^3/s] とする。

タンク i からの流出量は定数 $c_i>0$ を用いて $c_i\sqrt{h_i(t)}$ [m^3/s] で与えられる。

（a）$h_1(t), h_2(t), q(t)$ に関する微分方程式を求めよ。

タンクに入っている水の体積変化を考える。

・タンク１について

$$S_1\dot{h}_1 = q(t) - c_1\sqrt{h_1(t)}$$

・タンク２について

$$S_2\dot{h}_2 = q(t) + c_1\sqrt{h_1(t)} - c_2\sqrt{h_2(t)}$$

（２）流入量を一定量 $\bar{q}$ に維持したとき、各タンクの水位が平衡状態に達した。

このときの各タンクの水位 $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ を求めよ。

（１）で求めた微分方程式に、 $q(t) = \bar{q}, h_1(t) = \bar{h}_1, h_2(t) = \bar{h}_2$ を代入する。

・タンク１について

$$0 = \bar{q} - c_1\sqrt{\bar{h}_1}$$

$$\therefore \bar{h}_1 = \left(\frac{\bar{q}}{c_1}\right)^2$$

・タンク２について

$$0 = \bar{q} + c_1\sqrt{\bar{h}_1} - c_2\sqrt{\bar{h}_2}$$

$$0 = \bar{q} + c_1\frac{\bar{q}}{c_1} - c_2\sqrt{\bar{h}_2}$$

$$\therefore \bar{h}_2 = \left(\frac{2\bar{q}}{c_2}\right)^2$$

（3）流入量および各タンクの水位を平衡状態からの偏差として

$$q(t) = \bar{q} + u(t), \quad h_1(t) = \bar{h}_1 + x_1(t), \quad h_2(t) = \bar{h}_2 + x_2(t)$$

とおく。近似線形化により、$x_1(t), x_2(t), u(t)$ に関する状態方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

の係数行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を求めよ。

（1）で求めた微分方程式に、

$$q(t) = \bar{q} + u(t), \quad h_1(t) = \bar{h}_1 + x_1(t), \quad h_2(t) = \bar{h}_2 + x_2(t)$$

を代入する。

・タンク 1 について

$$S_1\dot{x}_1 = \bar{q} + u(t) - c_1\sqrt{\bar{h}_1 + x_1}$$

・タンク 2 について

$$S_2\dot{x}_2 = \bar{q} + u(t) + c_1\sqrt{\bar{h}_1 + x_1} - c_2\sqrt{\bar{h}_2 + x_2}$$

ここで、$x \ll 1$ のとき、$(1+x)^n \approx 1 + nx$ を利用して、

$$\sqrt{\bar{h}_i + x_i} = \sqrt{\bar{h}_i}\left(1 + \frac{x_i}{\bar{h}_i}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\bar{h}_i}\left(1 + \frac{x_i}{2\bar{h}_i}\right) = \sqrt{\bar{h}_i} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_i}}x_i$$

これを、2 式に代入する。

・タンク 1 について

$$S_1\dot{x}_1 = \bar{q} + u(t) - c_1\left(\sqrt{\bar{h}_1} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1}}x_1\right)$$

・タンク 2 について

$$S_2\dot{x}_2 = \bar{q} + u(t) + c_1\left(\sqrt{\bar{h}_1} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1}}x_1\right) - c_2\left(\sqrt{\bar{h}_2} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_2}}x_2\right)$$

（b）の結果を代入して整理する。

・タンク 1 について

$$S_1\dot{x}_1 = \bar{q} + u - c_1\left(\left(\frac{\bar{q}}{c_1}\right) + \frac{1}{2\left(\frac{\bar{q}}{c_1}\right)}x_1\right)$$

$$= -\frac{{c_1}^2}{2\bar{q}}x_1 + u$$

・タンク 2 について

$$S_2\dot{x}_2 = \bar{q} + u + c_1\left(\left(\frac{\bar{q}}{c_1}\right) + \frac{1}{2\left(\frac{\bar{q}}{c_1}\right)}x_1\right) - c_2\left(\left(\frac{2\bar{q}}{c_2}\right) + \frac{1}{2\left(\frac{2\bar{q}}{c_2}\right)}x_2\right)$$

$$= \frac{{c_1}^2}{2\bar{q}}x_1 - \frac{{c_2}^2}{4\bar{q}}x_2 + u$$

よって、それぞれの方程式は次式となる。

$$\dot{x}_1 = -\frac{{c_1}^2}{2S_1\bar{q}}x_1 + \frac{1}{S_1}u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{{c_1}^2}{2S_2\bar{q}}x_1 - \frac{{c_2}^2}{4S_2\bar{q}}x_1 + \frac{1}{S_2}u$$

以上より、行列形式で書くと、

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{{c_1}^2}{2S_1\bar{q}} & 0 \\ \frac{{c_1}^2}{2S_2\bar{q}} & -\frac{{c_2}^2}{4S_2\bar{q}} \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} \\ \frac{1}{S_2} \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

したがって、係数行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ は、

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{{c_1}^2}{2S_1\bar{q}} & 0 \\ \frac{{c_1}^2}{2S_2\bar{q}} & -\frac{{c_2}^2}{4S_2\bar{q}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} \\ \frac{1}{S_2} \end{bmatrix}$$

（４）以下の二つの場合について可観測性行列のランクを求め、可観測性を判定せよ。

i)　観測出力を $y = x_1(t)$ とする場合

ii）観測出力を $y = x_2(t)$ とする場合

【連続時間線形システムの可制御性の条件】

連続時間線形システムが可観測であるための必要十分条件は、$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$ について、

$$\text{可観測性行列}\quad \boldsymbol{M_O} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA^2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA^{n-1}} \end{bmatrix}$$

のランクが $\boldsymbol{n}$ であること。（フルランク）

i)　観測出力を $y = x_1(t)$ とする場合

$$\boldsymbol{y}(t) = [1 \quad 0]\boldsymbol{x}(t), \quad \rightarrow \boldsymbol{C} = [1 \quad 0]$$

$$\boldsymbol{CA} = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} -\dfrac{{c_1}^2}{2S_1\bar{q}} & 0 \\ \dfrac{{c_1}^2}{2S_2\bar{q}} & -\dfrac{{c_2}^2}{4S_2\bar{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{{c_1}^2}{2S_1\bar{q}} & 0 \end{bmatrix}$$

よって、可制御性行列は、ランクは１ではなく、可観測でない。

$$\therefore \boldsymbol{M_O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{{c_1}^2}{2S_1\bar{q}} & 0 \end{bmatrix}$$

ii）観測出力を $y = x_2(t)$ とする場合

$$\boldsymbol{y}(t) = [0 \quad 1]\boldsymbol{x}(t), \quad \rightarrow \boldsymbol{C} = [0 \quad 1]$$

$$\boldsymbol{CA} = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} -\dfrac{{c_1}^2}{2S_1\bar{q}} & 0 \\ \dfrac{{c_1}^2}{2S_2\bar{q}} & -\dfrac{{c_2}^2}{4S_2\bar{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{{c_1}^2}{2S_2\bar{q}} & -\dfrac{{c_2}^2}{4S_2\bar{q}} \end{bmatrix}$$

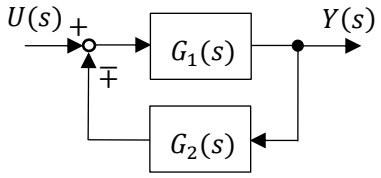
よって、可制御性行列は、明らかにフルランク（ランク２）で、可観測。

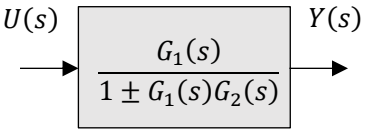
$$\therefore \boldsymbol{M_O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{{c_1}^2}{2S_2\bar{q}} & -\dfrac{{c_2}^2}{4S_2\bar{q}} \end{bmatrix}$$

（2）図 2-2 に示すフィードバック系を考える。

（a）フィードバック系の伝達関数を求めよ。

フィードバック結合





フィードバック制御系の閉ループ伝達関数 $G(s)$ は、（a）より、

$$G(s) = \frac{\frac{K}{s} \cdot \frac{s+3}{s+1}}{1 + \frac{K}{s} \cdot \frac{s+3}{s+1}}$$

$$\therefore G(s) = \frac{K(s+3)}{s^2 + (K+1)s + 3K}$$

（b）フィードバック系のインパルス応答が振動的となる K の範囲を求めよ。

考察を行うため、$G(s)$ の変形を行い、2 次遅れ系の応答の**速応性・振動**に関する挙動を特徴づけるパラメータの固有角（自然角）周波数 ω_n および減衰係数 ζ を求める。

$$H(s) = \frac{K_p}{s^2 + K_v s + K_p} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

固有角周波数: $\omega_n = \sqrt{K_p}$,　**減衰係数**: $\zeta = \frac{K_v}{2\sqrt{K_p}}$

(i) $\zeta = 0$ の場合・・・持続振動（単振動）

(ii) $0 < \zeta < 1$ の場合・・・不足制動（減衰振動）

(iii) $\zeta = 1$ の場合・・・臨界制動（臨界減衰）

(iv) $\zeta > 1$ の場合・・・過制動（過減衰）



（1）で求めた $G(s)$ より、

$$\zeta = \frac{K_v}{2\sqrt{K_p}} = \frac{K+1}{2\sqrt{3K}}$$

振動的であるとは、次式を満たすことである。

$$0 \leq \zeta < 1$$

よって、

$$0 \leq \frac{K+1}{2\sqrt{3K}} < 1$$

$$0 \leq K+1 < 2\sqrt{3K}$$

$$(K+1)^2 - 12K < 0$$

$$\therefore 5 - 2\sqrt{6} < K < 5 + 2\sqrt{6}$$

【別解】

$$G(s) = \frac{K(s+3)}{s^2 + (K+1)s + 3K}$$

伝達関数の極が、複素共役根もしくは純虚根を持てば、不足制動・持続振動を行うので、

$$s^2 + (K+1)s + 3K = 0$$

の判別式を D とすれば、振動的となる条件は、

$$D = (K+1)^2 - 12K < 0$$

$$\therefore 5 - 2\sqrt{6} < K < 5 + 2\sqrt{6}$$

（c）K を 0 から ∞ へ変化させた際のフィードバック系の根軌跡の概形を書け。
　軌跡の向きおよび代表的な点における極の値を記すこと。

・閉ループ伝達関数

$$G(s)=\frac{K(s+3)}{s^2+(K+1)s+3K}$$

極（特性根）は、$s^2+(K+1)s+3K=0$ を解く。

①$K=0$ とする。極（特性根）は、$s^2+s=0$ を解いて、$\therefore s=-1,0$　これが、始点となる。

②$0<K<5-2\sqrt{6}$，$5+2\sqrt{6}<K$ の間は、極（特性根）は 2 実根

$$\therefore s=\frac{-(K+1)\pm\sqrt{(K-5)^2-24}}{2}$$

となり、K の増大に伴って、実部は減少する。

虚部は、$0<K<5-2\sqrt{6}$ で減少、$5+2\sqrt{6}<K$ で増加する。

③$K=5\pm2\sqrt{6}$ のとき、極（特性根）は重根

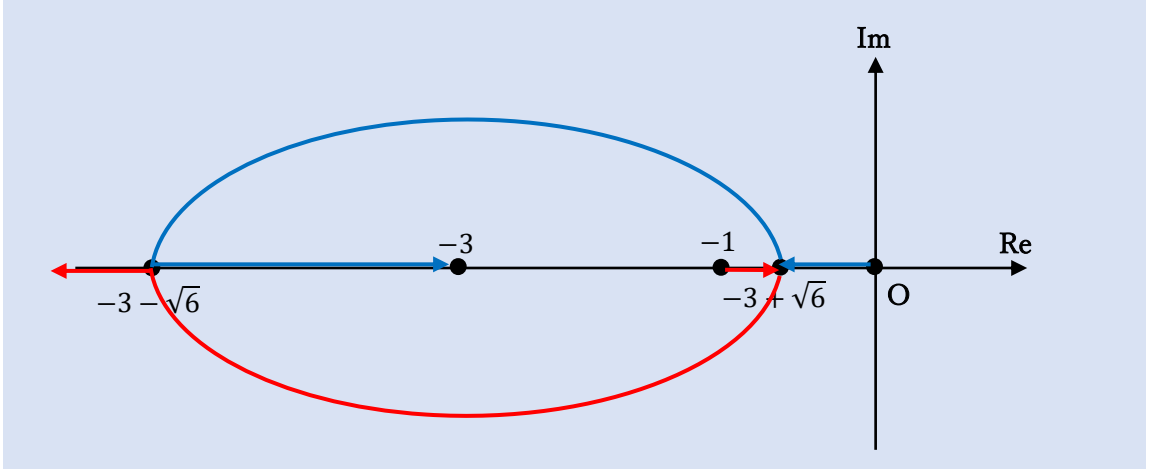
$$s=\frac{-(K+1)}{2}=\frac{-6\mp2\sqrt{6}}{2}=-3\mp\sqrt{6}$$

④$5-2\sqrt{6}<K<5+2\sqrt{6}$ の間は、極（特性根）は複素共役根

$$\therefore s=\frac{-(K+1)\pm j\sqrt{-(K-5)^2+24}}{2}$$

となり、K の増大に伴って、実部は減少する。

虚部は、$K<5$ で増加、$5<K$ で減少する。



また、根軌跡には以下の性質があり、根軌跡を描く際に利用される。

性質 1　根軌跡の始点は、$L(s)$ の極 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ である。また、終点のうち m 個は、$L(s)$ の零点 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ であり、残りの $n-m$ 個は、複素平面上の無限遠である。

性質 2　無限遠に至る $n-m$ 本の根軌跡の漸近線の角度は、次で与えられる。

$$\frac{180+360i}{n-m}\ [\text{度}] \quad (i=1,2,\cdots,n-m)$$

・閉ループ伝達関数 $L(s)$

$$L(s)=\frac{K}{s}\cdot\frac{s+3}{s+1}$$

根軌跡の始点→ $L(s)$ の極 $s=-1,0$　分母の次数は $n=2$ → 軌跡は 2 本

伝達関数の分子の次数は $m=1$ → 終点は零点で、$s+3=0$ を解いて、$s=-3$

$n-m=1$ → 終点は無限遠。漸近線の角度は、$180+360\cdot 1=540$ [°]

性質 3　実軸上の点 q を考えたとき、実軸上でその右側に $L(s)$ の極と零点（いずれも虚部は 0 ）が重複度を含め、合わせて奇数個存在するならば、q は根軌跡上の点である。

性質 4　根軌跡が実軸から分岐するならば、分岐する点 s は次を満たす。

$$\frac{d}{ds}L^{-1}(s)=0$$

また、根軌跡が実軸に合流するならば、合流する点 s もこの式を満たす。

性質 5　始点 p_j の虚部は非零の場合は、その始点における根軌跡の角度は

$$180-\sum_{i\in\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{j\}}\angle(p_j-p_i)+\sum_{i=1}^{m}\angle(p_j-z_i)\ [\text{度}]$$

となる。ただし、$m=0$ のときは $\sum_{i=1}^{m}\angle(p_j-z_i)=0$ とする。

同様に、$m\neq 0$ のときに、終点 z_j の虚部が非零の場合は、その終点における根軌跡の角度は次で与えられる。

$$180-\sum_{i\in\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{j\}}\angle(z_j-z_i)+\sum_{i=1}^{n}\angle(z_j-p_i)\ [\text{度}]$$

2018（H30）年度【２】略解

（１）	
(a)	$S_1\dot{h}_1 = q(t) - c_1\sqrt{h_1(t)}$ $S_2\dot{h}_2 = q(t) + c_1\sqrt{h_1(t)} - c_2\sqrt{h_2(t)}$
(b)	$\bar{h}_1 = \left(\frac{\bar{q}}{c_1}\right)^2, \quad \bar{h}_2 = \left(\frac{2\bar{q}}{c_2}\right)^2$
(c)	$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{{c_1}^2}{2S_1\bar{q}} & 0 \\ \frac{{c_1}^2}{2S_2\bar{q}} & -\frac{{c_2}^2}{4S_2\bar{q}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} \\ \frac{1}{S_2} \end{bmatrix}$
(d)	i)　可観測でない　ii）可観測
（２）	
(a)	$G(s) = \frac{K(s+3)}{s^2 + (K+1)s + 3K}$
(b)	$5 - 2\sqrt{6} < K < 5 + 2\sqrt{6}$
(c)	略

2018（H30）年度【２】講評

（１）水位系

(a) 水位系の方程式は立式できただろうか。

いや、できるわけない、こんなもん出すな！

物理システムとして、機械系の直線運動・回転運動はまだ分かる。

電気回路・水位系・熱系まで出題しないでほしい。(切実)

(b) 代入して求めるだけ。

(c) 線形化に先立って、近似できるかどうか。

(d) 可観測性行列は記憶しておく。行列の計算に気を付けたい。

制御工学Ⅱから現代制御の内容の出題。やめてくれー（ウエストランド井口風）

（２）フィードバック制御系

(a) 伝達関数の知識が問われている。

(b) インパルス応答について。

２次遅れ系に関して、振動的という条件について、覚えておきたい。

(c) 根軌跡について問われている。意外と盲点な根軌跡。実にややこしい。(福山雅治風)

古典制御の内容に関しては、制御工学Ⅰの講義課題をしっかりと満遍なく復習したい。