2022 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：生産工学・制御工学　[1 / 4]

（問題 [1]，[2] は別々の答案用紙に解答すること．）

[1]　以下の問い（1）～（5）に答えよ．

（1）図 1-1 に示すような角ねじにおいて，ナット（めねじ）を回転させて紙面の上方向に締め付ける場合を考える．図中の A は，簡単のためにナット側のめねじがねじ面に接する一部分だけを切り出したものであり，ここに集中荷重が作用するものとして考える．ナットの締付トルク T により発生する接線方向力を P，軸力を F_f，リード角を β としたとき，ねじ面に沿った方向における力のつり合いを表す式を示せ．ただし，ねじ面に作用する摩擦力 f も，摩擦係数 μ を使って接線方向力 P および軸力 F_f の関数として表すこと．

（2）締付トルク T を，ねじの有効径 d_2，軸力 F_f，リード角 β，および摩擦係数 μ の関数として表す式を示せ．また，摩擦角 ρ を使って式を整理せよ．ただし，摩擦係数と摩擦角の関係は $\mu = \tan\rho$ である．ここでは，ナットを上向きに移動させる方向のトルクを正とする．

（3）図 1-1 の接線方向力 P の向きを反対にし，ナットを緩める状態とする．問い（2）とは逆に緩める方向のトルク T を正としたとき，トルク T を，ねじの有効径 d_2，軸力 F_f，リード角 β，および摩擦角 ρ の関数として表す式を示せ．また，ねじの自立条件（ねじが緩まずにとまっていられるための条件）について，摩擦角 ρ とリード角 β の関係に基づいて説明せよ．

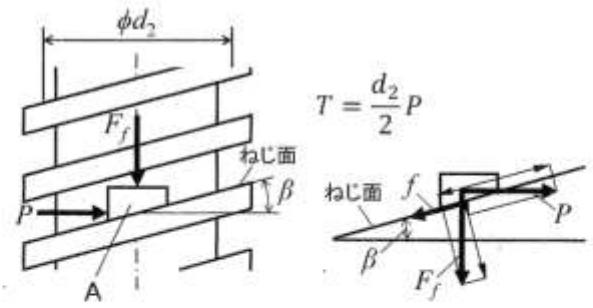
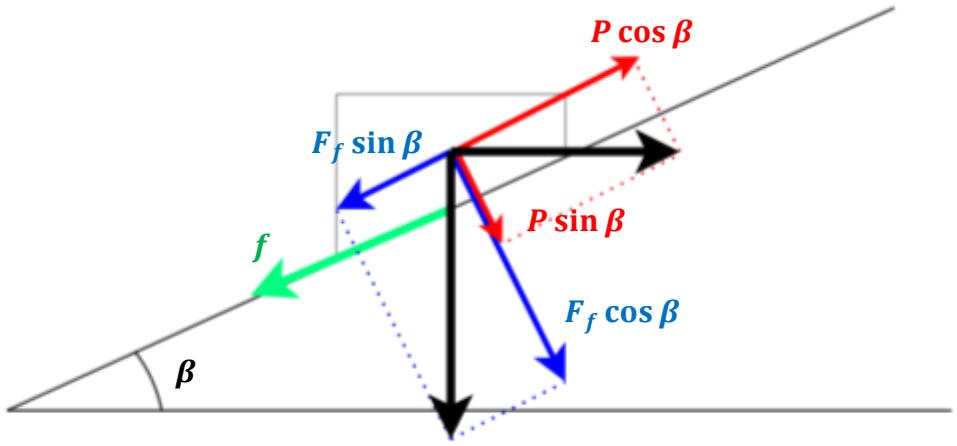


図 1-1　角ねじにおける力のつり合い（締付時）

2022（R4）年度　⑤生産工学　問題

【1】（1）（2）（3）〈ねじの力学〉

（1）ねじ面に沿った方向における力のつり合いを表す式を示せ。
ただし、ねじ面に作用する摩擦力 f も、摩擦係数 μ を使って接線方向力 P および軸力 F_f の関数として表すこと。



ねじ面（斜面）に沿った力のつり合い式は、

$$P\cos\beta - F_f\sin\beta = f$$

ここで、ねじ面に作用する静止摩擦力 f は、

$$f = \mu \cdot N = \mu\left(F_f\cos\beta + P\sin\beta\right)$$

以上より、ねじ面に沿った方向における力のつり合いを表す式は、次式となる。

$$P\cos\beta - F_f\sin\beta = \mu\left(F_f\cos\beta + P\sin\beta\right)$$

（2）締付トルク T を、ねじの有効径 d_2, 軸力 F_f, リード角 β, および摩擦係数 μ の関数として表す式を示せ。また、摩擦角 ρ を使って式を整理せよ。
ただし、摩擦係数と摩擦角の関係は $\mu = \tan\rho$ である。
ここでは、ナットを上向きに移動させる方向のトルクを正とする。

$$T = \frac{d_2}{2}P$$

より、

$$P = \frac{2T}{d_2}$$

であるので、（1）の結果より、上式を代入すると、

$$\frac{2T}{d_2}\cos\beta - F_f \sin\beta = \mu\left(F_f\cos\beta + \frac{2T}{d_2}\sin\beta\right)$$

両辺 $\cos\beta$ で除して、

$$\frac{2}{d_2}T - F_f \tan\beta = \mu\left(F_f + \frac{2}{d_2}T\tan\beta\right)$$

$$\frac{2}{d_2}T(1 - \mu\tan\beta) = F_f(\mu + \tan\beta)$$

よって、締付トルク T を、ねじの有効径 d_2, 軸力 F_f, リード角 β, および摩擦係数 μ の関数として表す式は、次式となる。

$$\therefore T = F_f\frac{d_2}{2}\frac{(\mu + \tan\beta)}{(1 - \mu\tan\beta)}$$

また、摩擦角 ρ を使って式を整理すると、$\mu = \tan\rho$ を代入して、

$$T = F_f\frac{d_2}{2}\frac{(\tan\rho + \tan\beta)}{(1 - \tan\rho\tan\beta)}$$

三角関数の加法定理より、

$$\therefore T = F_f\frac{d_2}{2}\tan(\rho + \beta)$$

（3）問い（2）とは逆に緩める方向のトルク T を正としたとき、トルク T を、
ねじの有効径 d_2, 軸力 F_f, リード角 β, および摩擦係数 μ の関数として表す式を示せ。
また、ねじの自立条件（ねじが緩まずにとまっているための条件）について、
摩擦角 ρ とリード角 β の関係に基づいて説明せよ。

ねじを緩めるときの状態を考えるには、（2）の結果の式において、リード角 β を負にする。

$$T = F_f \frac{d_2}{2} \tan(\rho - \beta)$$

$\rho < \beta$ になるとトルク T は負になり、ねじの回転を押さえるためのトルクが必要で、
ねじは勝手に回りだして緩んでしまう。

ねじが緩まずにとまっているためには、$\rho > \beta$ である必要がある。

ねじの自立条件

(4) 製品の設計の流れを表す図 1-2 において，①～④に入る用語を以下の中から選べ．また，それぞれの過程において行われる内容を説明せよ．ここでの要求とは，設計を行うための動機付けを意味し，仕様の決定も①～④の流れの中で行われるものとする．

基本設計　　生産設計　　詳細設計　　概念設計

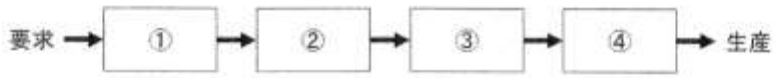


図 1-2　設計の流れ

(5) 加工の効率は，材料除去率（単位時間当たりの切削体積）として表され，加工の効率を上げるためには，同じ切込み量であれば切削速度を大きくする必要がある．耐熱合金は難削材（効率よく削ることが難しい材料）であることが多いが，その理由について，被削材の熱伝導率，加工による発熱，および工具寿命の観点から説明せよ．なお，説明には，切削加工のエネルギは切削速度に比例することを用いよ．

【1】（4）〈設計の理論〉

（4）製品の設計の流れを表す図 1-2 において、①～④に入る用語を以下の中から選べ。
また、それぞれの過程において行われる内容を説明せよ。

① 概念設計　→　② 基本設計　→　③ 詳細設計　→④ 生産設計

① 概念設計　← 製品企画・要求分析・アイデアスケッチ

・設計候補の調査、検討・最もよい設計候補の選択・原理的設計解〈概念〉の創造

② 基本設計　← 工学的解析

・基本機能などの検討・製品の全容を把握・部品を製造するか購入するか決定

③ 詳細設計　← 工学的解析・表現

・製品を構成する部品の設計・基本図をもとに部品展開・部品図と組立図の作成

④ 生産設計　← 製造

・加工図の作成・加工工程図の作成・組立工程図の作成・製造に必要な治具・工具の設計

【1】（5）〈難削材加工〉

（5）耐熱合金は難削材（効率よく削ることが難しい材料）であることが多いが、その理由について、被削材の熱伝導率、加工による発熱、および工具寿命の観点から説明せよ。
なお、説明には、切削加工のエネルギは切削速度に比例することを用いよ。

すくい面において生じる**加工の摩擦による発熱**は、工具側と切りくず側に伝わる。
被削材の熱伝導率が低いと、すくい面から切りくずへの熱流入割合が小さいため、
より多くの熱量が工具側に伝わって、工具の温度が上昇し、工具摩耗が激しくなる。
切削加工のエネルギは切削速度に比例するため、加工時間の短縮による効率向上を
目指すと、発熱量が大きくなり、工具摩耗による**工具寿命の低下**につながるから。

2022（R4）年度【1】講評

（1）（2）（3）ねじの力学についての問い。2022 年度設計工学Ⅰ第 6 回の内容。
（4）設計の理論についての問い。2022 年度設計工学Ⅰ第 2 回の内容。
（5）難削材加工についての問い。2021 年度製造プロセス工学Ⅰの第 5 回課題に類似。

佐藤隆太先生が作成したんだろうなあ、という問題だらけ。
来年度の生産工学の出題傾向は読めんなあ、という感じ。

2022 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：生産工学･制御工学　[3 / 4]

(問題 [1]，[2] は別々の答案用紙に解答すること．)

[2] 以下の問い (1)~(7) に答えよ．(必要に応じて，$\log_{10} 2 \simeq 0.301$, $\log_{10} 3 \simeq 0.477$, $\log_{10} 5 \simeq 0.699$ の近似値を用いてよい．)

(1) 図 2-1 のような台車系を考える．台車の質量を m[kg] とし，台車と壁面とはばね定数 k[N/m] のばねと粘性係数 d[Ns/m] のダッシュポット（ダンパー）で結合されており，台車と床面との間の摩擦は無視する．この台車の左側から台車に加えられる力を f[N]，$f = 0$ での台車のつり合い位置からの変位を x[m] とし，この台車系の運動方程式を求め，さらに f から x までの伝達関数 $G(s)$ を求めよ．

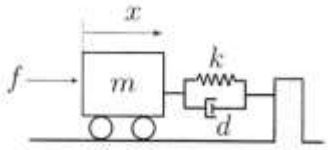
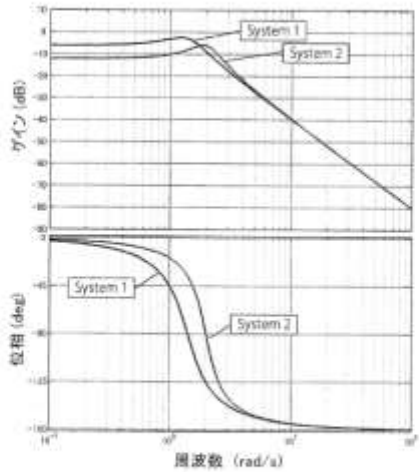
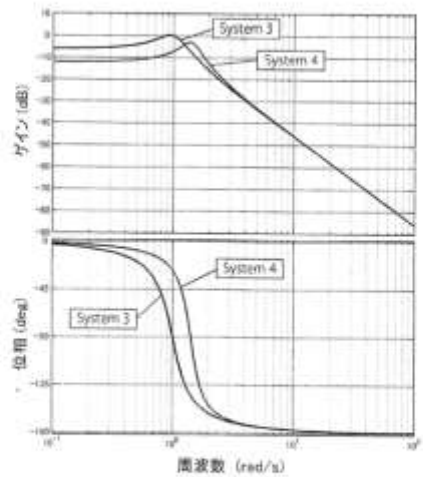


図 2-1　台車系

(2) $G(s)$ の周波数応答を調べ，そのボード線図から m, d, k の各値を正の整数値の範囲で推定したところ，$m = 1, d = 1, k = 2$ となった．図 2-2 の System 1 から System 4 までの 4 つの系ボード線図の中から，この $G(s)$ に相当するものを選ぶとともに，その根拠を簡潔に述べよ．



(a) System 1 と System 2



(b) System 3 と System 4

図 2-2　4 つの系のボード線図

(3) 図 2-1 の台車系を図 2-3 のように 2 つ用意し，台車間をばね定数 $\hat{k}$ のばねで結合した系を構成した．2 台の台車を連結するばねの自然長は，台車 1，2 それぞれがつり合い位置にあるときの台車間の距離に等しいものとする．入力 f が加えられる台車を台車 1，もう一方の台車を台車 2 と呼ぶ．このとき f を入力とし，台車 2 の基準位置からの変位 y を出力とする系（以降，連結台車系とする）の伝達関数 $H(s)$ を求めたい．そのために，まずこのような力学系にもフィードバック要素が内在していることを考慮し，この連結台車系のブロック線図を描け．その際，問い (1) で求めた伝達関数 $G(s)$ を図 2-4 に示すようなブロック図で表現すること．

(4) 問い (3) で描いたブロック線図を簡単化し，伝達関数 $H(s)$ が $H(s) = \dfrac{\hat{k} \cdot G(s)^2}{1 + 2\hat{k}G(s)}$ となることを示せ．

(5) 台車 2 の変位 y を台車 1 への入力 f を調節することで制御するために，図 2-5 のような比例ゲイン $K(> 0)$ によるサーボ系を構成する．ただし y_r は y の目標値である．このサーボ系において，$G(s)$ の各パラメータを問い (2) で推定された値とし，$\hat{k} = 5$ としたとき，このサーボ系が安定となる K の範囲を求めよ．

(6) 図 2-5 のサーボ系において，各パラメータを問い (5) で設定した値としたときの定常位置偏差を K の関数として示し，さらにこの定常位置偏差の取り得る範囲を示せ．

(7) 図 2-5 のサーボ系の定常特性を改善するために，制御系を単純な比例ゲインから変更するとすれば，位相遅れ補償と位相進み補償のどちらを採用すべきかを，その理由とともに答えよ．

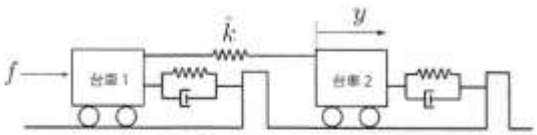


図 2-3　連結台車系

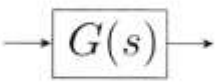


図 2-4　ブロック

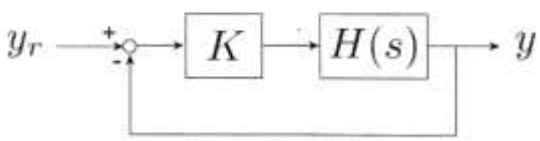
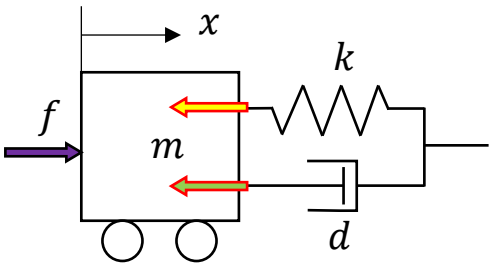


図 2-5　サーボ系

2022（R4）年度　⑤制御工学　問題

【２】問題〈ばね・質量・ダンパ系〉

（１）図 2-1 のような台車系の運動方程式を求め、
さらに f から x までの伝達関数 $G(s)$ を求めよ。



このばね・質量・ダンパ系の運動方程式は、

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = f$$

出力 $x(t)$ と入力 $f(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $X(\mathrm{s}), \mathrm{F}(\mathrm{s})$ とし、
初期値 0 のもとで運動方程式をラプラス変換すると、

$$ms^2X(\mathrm{s}) + dsX(\mathrm{s}) + kX(\mathrm{s}) = F(\mathrm{s})$$

$$(ms^2 + ds + k) \cdot X(\mathrm{s}) = F(\mathrm{s})$$

よって、伝達関数 $G(s)$ は、

$$\therefore G(s) = \frac{X(\mathrm{s})}{F(\mathrm{s})} = \frac{1}{ms^2 + ds + k}$$

（２）$G(s)$ の周波数応答を調べ、そのボード線図から $m,\ d,\ k$ の各値を正の整数値の範囲で推定したところ、$m = 1,\ d = 1,\ k = 2$ となった。図 2-2 の System1 から System4 までの 4 つの系ボード線図の中から、この $G(s)$ に相当するものを選ぶとともに、その根拠を簡潔に述べよ。

定常ゲイン K とピーク（共振角）周波数 ω_p に注目する。
ボード線図上で、ピーク（共振角）周波数 ω_p は、固有角周波数 ω_n に等しいと考えられる。

$$\omega_p = \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad K = \sqrt{\frac{1}{k}}$$

より、$m=1,\ d=1,\ k=2$ を代入して、

$$\omega_p=\omega_n=\sqrt{2},\quad K=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって、位相線図から、

$$\omega_p\cong 1.4\quad\rightarrow\quad \text{System1}\quad \text{or}\quad \text{System4}$$

また、定常ゲインを dB 表示に直すと、

$$g=20\log_{10}K=20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{2}}=-10\log_{10}2$$

与えられた $\log_{10}2=0.301$ を利用すると、ゲイン線図から、

$$g=-3.01\quad\rightarrow\quad \text{System1}\quad \text{or}\quad \text{System3}$$

したがって、以上のゲイン特性・位相特性より、
図 2-2 の中で、System1 が $G(s)$ に相当する。

【参考】

（1）の結果より、

$$G(s)=\frac{1}{ms^2+ds+k}=\frac{\frac{1}{k}\cdot\frac{k}{m}}{s^2+\frac{d}{m}s+\frac{k}{m}}=\frac{1}{k}\cdot\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \zeta=\frac{d}{2\sqrt{mk}}$$

$G(s)$ の周波数応答 $\tilde{y}(t)$ は、

$$\tilde{y}(t)=|G(j\omega)|\sin\big(\omega t+\angle G(j\omega)\big)$$

$$\therefore G(j\omega)=\frac{1}{k}\cdot\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2}=\frac{1}{k}\cdot\frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2-\omega^2)+j(2\zeta\omega_n\omega)}$$

ω_n^2 で除して、

$$\Omega=\frac{\omega}{\omega_n}$$

とおいて規格化する。

$$\therefore G(j\Omega) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(1-\Omega^2) + j(2\zeta\Omega)}$$

$$|G(j\omega)| = \left|\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(1-\Omega^2) + j \cdot 2\zeta\Omega}\right| = \left|\frac{1}{k} \cdot \frac{(1-\Omega^2) - j \cdot 2\zeta\Omega}{(1-\Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}\right| = \sqrt{\frac{1}{k}}\{(1-\Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2\}^{-\frac{1}{2}}$$

Ω に関して微分する。（合成関数の微分）

$$\frac{d}{d\Omega}|G(j\omega)| = \frac{d}{d\Omega}\left[\sqrt{\frac{1}{k}}\{(1-\Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2\}^{-\frac{1}{2}}\right]$$

これが 0 となるのは、Ω が次式を満たすときである。

$$-4\Omega(1-\Omega^2) + 8\zeta^2\Omega = 0$$

$$\Omega^2 = 1 - 2\zeta^2 \quad \therefore \Omega_p = \frac{\omega_p}{\omega_n} = \sqrt{1-2\zeta^2}$$

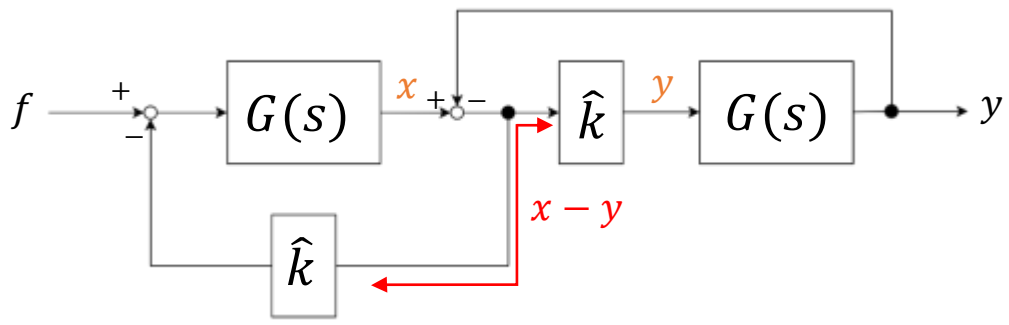
$\therefore \omega_p = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$：ピーク（共振）周波数

$\rightarrow 1 - 2\zeta^2 > 0, \quad \therefore \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときピークが存在

このときの大きさは、

$$\mathrm{M}_p = \sqrt{\frac{1}{k}}\left\{\left(1-{\Omega_p}^2\right)^2 + \left(2\zeta\Omega_p\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \quad \therefore \mathrm{M}_p = \sqrt{\frac{1}{k}} \cdot \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

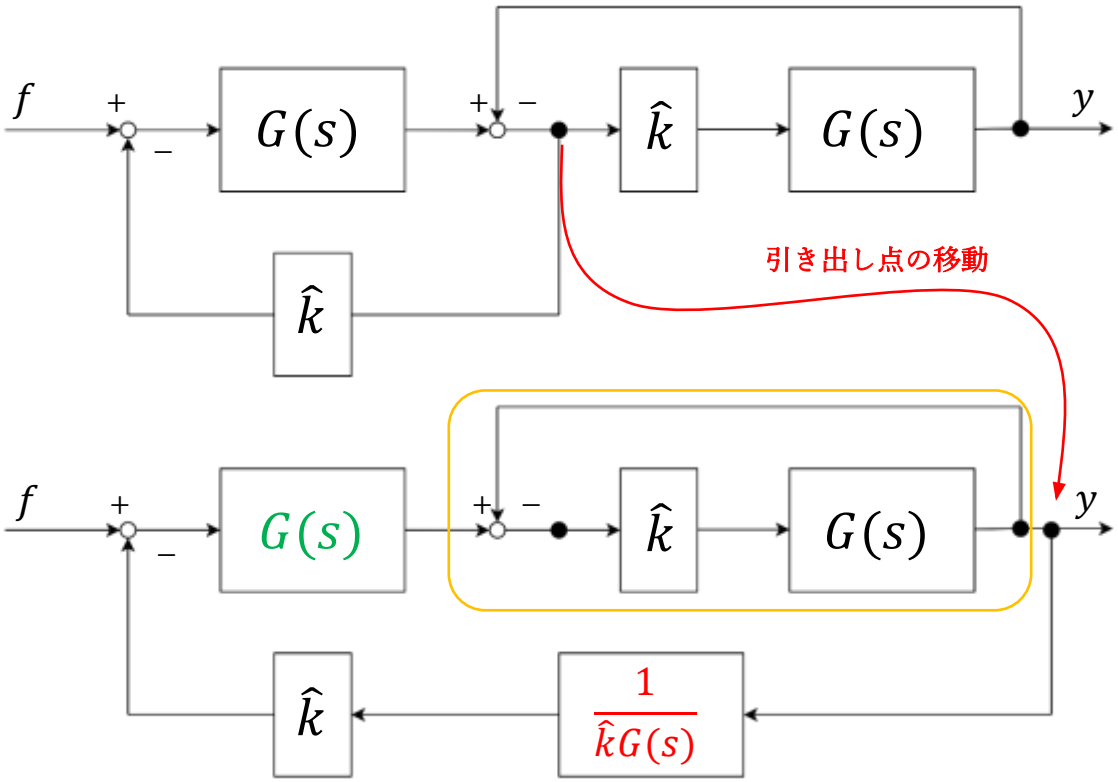
（3）f を入力とし、台車 2 の基準位置からの変位 y を出力とする系（連結台車系）の伝達関数 $H(s)$ を求めるために、このような力学系にもフィードバック要素が内在していることを考慮し、この連結台車系のブロック線図を描け。



（４）問い（３）で書いたブロック線図を簡単化し、伝達関数 $H(s)$ が

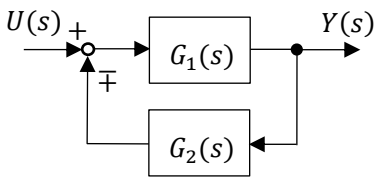
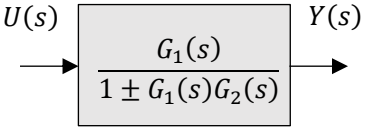
$$H(s)=\frac{\hat{k}\cdot G(s)^2}{1+2\hat{k}G(s)}$$

となることを示せ。



（３）のブロック線図の**引き出し点を移動**させ、

フィードバック系の中に、**フィードバック系**が存在する形を考える。

フィードバック結合		

伝達関数 $H(s)$ は、

$$H(s)=\frac{G(s)\cdot\dfrac{\hat{k}G(s)}{1+\hat{k}G(s)}}{1+G(s)\cdot\dfrac{\hat{k}G(s)}{1+\hat{k}G(s)}\cdot\left(\hat{k}\cdot\dfrac{1}{\hat{k}G(s)}\right)}=\frac{G(s)\cdot\hat{k}\cdot G(s)}{1+\hat{k}G(s)+\hat{k}G(s)}=\frac{\hat{k}\cdot G(s)^2}{1+2\hat{k}G(s)}$$

■

【別解】運動方程式からの導出

台車 1 , 2 について、それぞれ運動方程式は次式となる。

$$\begin{cases} m\ddot{x} + d\dot{x} + kx + \hat{k}(x-y) = f \\ m\ddot{y} + d\dot{y} + ky = -\hat{k}(y-x) = \hat{k}(x-y) \end{cases}$$

出力 $x(t), y(t)$ と入力 $f(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $X(s), Y(s), F(s)$ とし、

初期値 0 のもとで運動方程式をラプラス変換すると、

$$\begin{cases} (ms^2 + ds + k)\cdot X(\mathrm{s}) + \hat{k}\big(X(\mathrm{s}) - Y(\mathrm{s})\big) = F(\mathrm{s}) \\ (ms^2 + ds + k)\cdot Y(\mathrm{s}) = \hat{k}\big(X(\mathrm{s}) - Y(\mathrm{s})\big) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \big(ms^2 + ds + k + \hat{k}\big)\cdot X(\mathrm{s}) = F(\mathrm{s}) + \hat{k}Y(\mathrm{s}) \cdots ① \\ \big(ms^2 + ds + k + \hat{k}\big)\cdot Y(\mathrm{s}) = \hat{k}X(\mathrm{s}) \quad \cdots ② \end{cases}$$

式①より、

$$X(\mathrm{s}) = \frac{F(\mathrm{s}) + \hat{k}Y(\mathrm{s})}{(ms^2 + ds + k) + \hat{k}}$$

これを、式②に代入して、

$$\big(ms^2 + ds + k + \hat{k}\big)\cdot Y(\mathrm{s}) = \hat{k}\cdot\frac{F(\mathrm{s}) + \hat{k}Y(\mathrm{s})}{(ms^2 + ds + k) + \hat{k}}$$

$$\big(ms^2 + ds + k + \hat{k}\big)^2\cdot Y(\mathrm{s}) = \hat{k}F(\mathrm{s}) + \hat{k}^2 Y(\mathrm{s})$$

$$\big\{\big(ms^2 + ds + k + \hat{k}\big)^2 - \hat{k}^2\big\}\cdot Y(\mathrm{s}) = \hat{k}F(\mathrm{s})$$

（1）より伝達関数 $G(s)$ を用いると、

$$\left\{\left(\frac{1}{G(s)} + \hat{k}\right)^2 - \hat{k}^2\right\}\cdot Y(\mathrm{s}) = \hat{k}F(\mathrm{s})$$

$$\left\{\frac{1}{G^2(s)} + \frac{2\hat{k}}{G(s)}\right\}\cdot Y(\mathrm{s}) = \hat{k}F(\mathrm{s})$$

$$\big(1 + 2\hat{k}G(s)\big)\cdot Y(\mathrm{s}) = \hat{k}\cdot G^2(s)\cdot F(\mathrm{s})$$

よって、伝達関数 $H(s)$ は、

$$\therefore H(s) = \frac{Y(\mathrm{s})}{F(\mathrm{s})} = \frac{\hat{k}\cdot G^2(s)}{1 + 2\hat{k}G(s)}$$

（5）$G(s)$ の各パラメータを問い（2）で推定された値とし、$\hat{k}=5$ としたとき、
図 2-5 のサーボ系が安定となる $K(>0)$ の範囲を求めよ。

図 2-5 のサーボ系の伝達関数 $I(s)$ は、

$$I(s)=\frac{KH(s)}{1+KH(s)}$$

（4）より、$H(s)$ を代入して、

$$I(s)=\frac{K\dfrac{\hat{k}\cdot G(s)^2}{1+2\hat{k}G(s)}}{1+K\dfrac{\hat{k}\cdot G(s)^2}{1+2\hat{k}G(s)}}=\frac{K\cdot\hat{k}\cdot G(s)^2}{1+2\hat{k}G(s)+K\cdot\hat{k}\cdot G(s)^2}=\frac{K\cdot\hat{k}}{\dfrac{1}{G(s)^2}+\dfrac{2\hat{k}}{G(s)}+K\cdot\hat{k}}$$

（1）より、$G(s)$ を代入して、

$$I(s)=\frac{K\cdot\hat{k}}{(ms^2+ds+k)^2+2\hat{k}(ms^2+ds+k)+K\cdot\hat{k}}$$

（2）より、$m=1,\ d=1,\ k=2$ を代入して、$\hat{k}=5$ とすると、

$$I(s)=\frac{5K}{(s^2+s+2)^2+10(s^2+s+2)+5K}$$

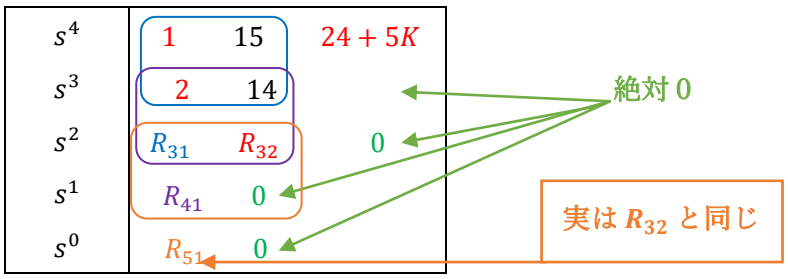
伝達関数の分母多項式 $D(s)$ は、

$$D(s)=s^4+2s^3+15s^2+14s+24+5K$$

以下、**ラウスの安定判別法**を用いて、安定性の条件を求める。

ラウス表

s^4	1	15	$24+5K$
s^3	2	14	
s^2	R_{31}	R_{32}	0
s^1	R_{41}	0	
s^0	R_{51}	0	



$$R_{31}=-\frac{\begin{vmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{vmatrix}}{R_{21}}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & 15\\ 2 & 14\end{vmatrix}}{2},\quad R_{32}=-\frac{\begin{vmatrix}R_{11} & R_{13}\\ R_{21} & R_{23}\end{vmatrix}}{R_{21}}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & 24+5K\\ 2 & 0\end{vmatrix}}{2}$$

$$R_{41}=-\frac{\begin{vmatrix}R_{21} & R_{22}\\ R_{31} & R_{32}\end{vmatrix}}{R_{31}}=-\frac{\begin{vmatrix}2 & 14\\ R_{31} & R_{32}\end{vmatrix}}{R_{31}},\quad R_{51}=-\frac{\begin{vmatrix}R_{31} & R_{32}\\ R_{41} & R_{42}\end{vmatrix}}{R_{41}}=-\frac{\begin{vmatrix}R_{31} & R_{32}\\ R_{41} & 0\end{vmatrix}}{R_{41}}$$

安定性の必要十分条件は、$D(s)=0$ のすべての根の実部が負であることである。

そして、$D(s)=0$ のすべての根の実部が負であることの必要十分条件が、

条件① ラウス数列がすべて正　　かつ　　条件② すべての係数が正

を満たすことである。

条件①を考える。

$$R_{31}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & 15\\ 2 & 14\end{vmatrix}}{2}=-\frac{1}{2}(14-30)=8>0$$

$$R_{32}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & 24+5K\\ 2 & 0\end{vmatrix}}{2}=24+5K>0$$

$$R_{41}=-\frac{\begin{vmatrix}2 & 14\\ 8 & 24+5K\end{vmatrix}}{8}=-\frac{1}{8}\cdot(48+10K-112)=\frac{1}{8}\cdot(64-10K)$$

$$R_{51}=-\frac{\begin{vmatrix}R_{31} & R_{32}\\ R_{41} & 0\end{vmatrix}}{R_{41}}=R_{32}$$

よって、次式を解けばよい。

$$64-10K>0$$

したがって、サーボ系が安定となる $K(>0)$ の範囲は、

$$\therefore 0<K<6.4$$

今回、条件②は条件①に含まれているので、これが答えとなる。

【別解】フルビッツの安定判別法を用いて、安定性の条件を求める。

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 15s^2 + 14s + 24 + 5K$$

の係数から次の行列を作る。

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 14 & 0 \\ 1 & 15 & 24+5K \\ 0 & 2 & 14 \end{bmatrix}$$

そして、H の $i \times i$ 主座小行列式（左上隅の $i \times i$ 小行列の行列式）を H_i とし、$H_1, \cdots, H_n$ を計算する。すなわち、

$$H_1 = a_3, \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix}, \quad H_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix}$$

これらのフルビッツ行列式とよばれる小行列式を計算する。

$a_n > 0$ のとき、システムが安定であるための必要十分条件は、

$H_1, \cdots, H_n$ がすべて正であること

である。（※実は、H_3 だけを確認すればよい。）

$$H_1 = a_3 = 2 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = 30 - 14 > 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ 1 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_1(a_3 a_2 - a_1) - a_0 a_3^2$$

$$= 14(30 - 14) - 4(24 + 5K) = 224 - 96 - 20K$$

よって、次式を解けばよい。

$$128 - 20K > 0$$

したがって、サーボ系が安定となる $K(>0)$ の範囲は、

$$\therefore 0 < K < 6.4$$

（6）図 2-5 のサーボ系において、各パラメータを問い（5）で設定した値としたときの定常位置偏差を K の関数として示し、さらにこの定常位置偏差の取り得る範囲を示せ。

定常位置偏差 e_s は、目標値 $\boldsymbol{r(t)=1}$ に対する定常偏差といい、以下の式で求められる。

$$e_s = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+L(s)}\frac{1}{s} = \frac{1}{1+\lim_{s\to 0} L(s)}$$

まず、一巡伝達関数 $L(s)$ は、

$$L(s) = K\cdot H(s) = K\frac{\hat{k}\cdot G(s)^2}{1+2\hat{k}G(s)} = K\frac{\hat{k}}{\frac{1}{G(s)^2}+\frac{2\hat{k}}{G(s)}}$$

$G(s)$ を代入して、

$$L(s) = K\frac{\hat{k}}{(ms^2+ds+k)^2+2\hat{k}(ms^2+ds+k)}$$

$m=1,\ d=1,\ k=2$ を代入して、$\hat{k}=5$ とすると、

$$L(s) = K\frac{5}{(s^2+s+2)^2+10(s^2+s+2)},\quad K_p = \lim_{s\to 0} L(s) = K\frac{5}{4+20} = \frac{5K}{24}$$

よって、定常位置偏差 e_s は、

$$\therefore e_s = \frac{1}{1+\frac{5K}{24}} = \frac{24}{24+5K}$$

（5）の結果より、サーボ系が安定となる K の範囲は、$0<K<6.4$ ゆえ、
定常位置偏差 e_s の取り得る範囲は、

$$\frac{24}{24+5\cdot(6.4)} < e_s < \frac{24}{24+5\cdot(0)}$$

$$\therefore \frac{3}{7} < e_s < 1$$

（7）図 2-5 のサーボ系の定常特性を改善するために、制御系を単純な比例ゲインから変更するとすれば、位相遅れ補償と位相進み補償のどちらを採用すべきかを、その理由とともに答えよ。

定常特性の改善に寄与するのは、位相遅れ補償である。
制御器のゲインを大きくすることで、定常偏差は小さくなる。位相遅れ補償は、
定常特性に関係する低周波数帯域において、定常ゲインを大きくすることができるから。

2022（R4）年度【2】略解

（1）	$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = f$ $G(s) = \dfrac{1}{ms^2 + ds + k}$
（2）	System1
（3）	略
（4）	略
（5）	$0 < K < 6.4$
（6）	$e_s = \dfrac{24}{24 + 5K}$ $\dfrac{3}{7} < e_s < 1$
（7）	位相遅れ補償

2022（R4）年度【2】講評

（1）ここで間違えると以降の問いは全滅なので、注意されたい。

（2）ボード線図のゲイン特性・位相特性の知識が問われている。

（3）冷静に考えたい。相対変位についての理解が重要。

（4）ブロック線図の扱いに慣れておきたい。

（5）安定性の知識が問われている。表を正確に書いて、計算に注意したい。

（6）定常位置偏差の定義をおさえておきたい。

（7）PID 制御の知識が問われている。