平成 29 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：流体力学　　[1 / 1]

（問題[1], [2]は別々の答案用紙に解答すること.）

[1] 2次元直角座標系 (x, y) における定常な空間2次元流れを考える．点 (x, y) における x 方向流速を u，y 方向流速を v とするとき，以下の問に答えなさい．

(1) 流体粒子の x 方向加速度および y 方向加速度を，u と v およびそれらの空間導関数である $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$ を用いて表しなさい．

(2) 非圧縮性流体の流れであるときに，u と v が満たすべき連続の式を示しなさい．

(3) 以下に示す具体的な流速分布(i)～(iii)のそれぞれについて，流体粒子の x 方向加速度および y 方向加速度を，x と y のみを用いて表しなさい．さらに非圧縮性流体の流れであるか否かをそれぞれ答えなさい．

(i) $u = x$，$v = y$．　(ii) $u = x$，$v = -y$．　(iii) $u = y$，$v = -x$．

(4) (3)で示した流速分布(i)～(iii)について，それぞれの流線を表す式を，x と y および任意定数 c を用いて表しなさい．さらに $x-y$ 平面上に流線の概略図を描きなさい．

[2] 速度 U の非圧縮性粘性流体の一様流中に，流れに平行に平板が設置されている．一様流が進む方向の平板に沿った座標を x，平板から流体中へ向かう平板に垂直な座標を y，平板の先端を $x = 0$ および $y = 0$ とする．この平板上に定常な層流境界層が形成されており，その x 方向速度成分 u は，$u = U\left[A\left(\frac{y}{\delta}\right) - B\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] (\geq 0)$ と表されるとする．ここで，$\delta = \delta(x)$ は境界層厚さ（$\delta(0) = 0$），A，B は正の定数である．板は奥行き方向に無限に長く，流れは二次元とみなせるものとする．また，流体の密度 ρ および粘性係数 μ は一定とする．このとき，以下の問に答えなさい．

(1) 平板上（$y = 0$）における位置 x の壁面せん断応力の大きさ τ_w を求めなさい．

(2) $y = \delta$ において，$u = U$ および $\frac{du}{dy} = 0$ を満たすように定数 A，B を定めなさい．

(3) 主流方向の圧力勾配がないとすると，境界層内の運動量保存則と近似速度分布より，$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = C\frac{d\delta}{dx}$ が成り立つ．ここで，C は定数である．δ を ρ，μ，U，x，C を用いて表しなさい．ただし，定数 A，B には(2)で求めた値を用いること．

(4) 平板先端から x までの間に平板に働く粘性による摩擦力を，x の関数として表しなさい．ただし，奥行き方向長さは単位長さとし，定数 A，B には(2)で求めた値を用いること．

2017（H29）年度【1】問題〈わき出し・よどみ点流れ・渦糸〉

【1】定常な空間2次元流れを考える。

（1）流体粒子の x 方向加速度および y 方向加速度を u と v およびそれらの空間導関数

$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ を用いて表しなさい。

〈ラグランジュ微分〉

$$\frac{D}{Dt}\boldsymbol{u} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\cdot\boldsymbol{u}$$

定常状態である条件は、

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = 0$$

よって、

流体粒子の x 方向加速度 a_x は、

$$a_x = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$

流体粒子の y 方向加速度 a_y は、

$$a_y = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}$$

（2）非圧縮性流体の流れであるときに、u と v が満たすべき連続の式を示しなさい。

〈流体力学の基礎方程式〉

・質量保存式（連続の式）

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0$$

非圧縮性流体である条件は、

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0$$

よって、連続の式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

（３）以下に示す具体的な流速分布（i)～(iii）のそれぞれについて、
流体粒子の x 方向加速度および y 方向加速度を、x と y のみを用いて表しなさい。
さらに非圧縮性流体の流れであるか否かをそれぞれ答えなさい。

(i)　$u=x,\quad v=y.$	(ii)　$u=x,\quad v=-y.$	(iii)　$u=y,\quad v=-x.$

（１）（２）で示した式にそれぞれ代入していく。

ここで、流体粒子の x 方向加速度を a_x，流体粒子の y 方向加速度 a_y とする。

(i)

$$a_x = x\frac{\partial x}{\partial x} + y\frac{\partial x}{\partial y} = x, \quad a_y = x\frac{\partial y}{\partial x} + y\frac{\partial y}{\partial y} = y$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 2 \neq 0$$

非圧縮性流体でない

(ii)

$$a_x = x\frac{\partial x}{\partial x} + (-y)\frac{\partial x}{\partial y} = x, \quad a_y = x\frac{\partial (-y)}{\partial x} + (-y)\frac{\partial (-y)}{\partial y} = y$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial (-y)}{\partial y} = 0$$

非圧縮性流体

(iii)

$$a_x = y\frac{\partial y}{\partial x} + (-x)\frac{\partial y}{\partial y} = -x, \quad a_y = y\frac{\partial (-x)}{\partial x} + (-x)\frac{\partial (-x)}{\partial y} = -y$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial (-x)}{\partial y} = 0$$

非圧縮性流体

（４）（３）で示した流速分布（i)～(iii）について、それぞれの流線を表す式を、
x と y および任意定数 c を用いて表しなさい。
さらに $x-y$ 平面上に流線の概略図を描きなさい。

流線の方程式より、

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}$$

(i)～(iii）について、それぞれ速度を代入していく。

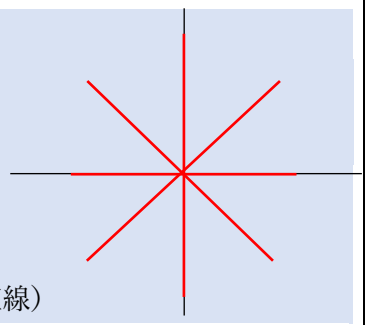
(i) わき出し

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y} \quad \therefore \frac{1}{x}dx=\frac{1}{y}dy$$

積分する。

$$\ln|x|=\ln|y|+C_1$$

$$\therefore y=cx \quad \text{（原点から放射状にのびる直線）}$$



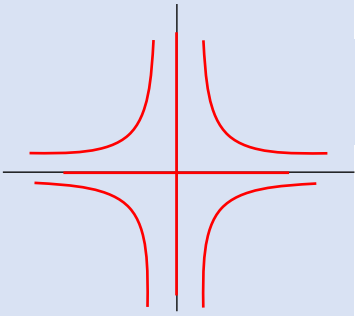
(ii) よどみ点流れ

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y} \quad \therefore \frac{1}{x}dx=-\frac{1}{y}dy$$

積分する。

$$\ln|x|=-\ln|y|+C_1$$

$$\therefore y=\frac{c}{x} \quad \text{（双曲線）}$$



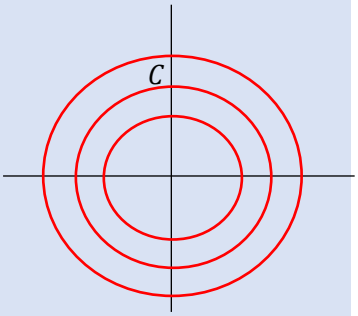
(iii) 渦糸

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x} \quad \therefore x\,dx=-y\,dy$$

積分する。

$$\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}y^2+C_1$$

$$\therefore x^2+y^2=c \quad \text{（原点中心の円）}$$



2017（H29）年度【1】略解

（1）	$a_x = u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y}$ $a_y = u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y}$	
（2）	$\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$	
（3）	(i)	$a_x = x, \quad a_y = y$ 非圧縮性流体でない
	(ii)	$a_x = x, \quad a_y = y$ 非圧縮性流体
	(iii)	$a_x = -x, \quad a_y = -y$ 非圧縮性流体
（4）	(i)	$y = cx$
	(ii)	$y = \dfrac{c}{x}$
	(iii)	$x^2 + y^2 = c$

2017（H29）年度【1】講評

ラグランジュ微分をはじめとした流体力学の基礎方程式の理解が問われた。
ただ知っているか知らないかという感じ。
（4）では、わき出し・よどみ点流れ・渦糸といったお馴染みの流れを図示。

2017（H29）年度【２】問題〈平行平板上の流れ〉

【２】平行平板上の流れ

$$u = U\left[A\left(\frac{y}{\delta}\right) - B\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right](\geq 0) \quad \delta = \delta(x), \quad \delta(0) = 0$$

（１）平板上 $(y = 0)$ における位置 x の壁面せん断応力の大きさ τ_w を求めなさい。

ニュートンの粘性法則

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

せん断応力 τ は、ニュートンの粘性法則より、

$$\tau = \mu\frac{du}{dy} = \mu\frac{d}{dy}U\left[A\left(\frac{y}{\delta}\right) - B\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] = \mu U\left[A\frac{1}{\delta} - 3B\frac{1}{\delta}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]$$

よって、平板上 $(y = 0)$ において、壁面せん断応力の大きさ τ_w は、

$$\tau_w = \frac{\mu UA}{\delta}$$

（２）$y = \delta$ において、$u = U$ および $du/dy = 0$ を満たすように定数 A, B を定めなさい。

$y = \delta$ において、$u = U$ であるから、問題文で与えられた式に代入して、

$$U = U\left[A\left(\frac{\delta}{\delta}\right) - B\left(\frac{\delta}{\delta}\right)^3\right] \quad \therefore A - B = 1$$

また（１）より、

$$\frac{du}{dy} = U\left[A\frac{1}{\delta} - 3B\frac{1}{\delta}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]$$

$y = \delta$ において、$du/dy = 0$ であるから、上式に代入して、

$$0 = U\left[A\frac{1}{\delta} - 3B\frac{1}{\delta}\left(\frac{\delta}{\delta}\right)^2\right] \quad \therefore A - 3B = 0$$

以上２式より、

$$(A, B) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

（３）主流方向の圧力勾配がないとすると、境界層内の運動量保存則と近似速度分布より、

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = C\frac{d\delta}{dx}$$

が成り立つ。ここで、C は定数である。δ を ρ, μ, U, x, C を用いて表しなさい。

ただし、定数 A, B には（２）で求めた値を用いること。

（１）（２）の結果より、

$$\tau_w = \frac{3\mu U}{2\delta}$$

これを与式に代入する。

$$\frac{3\mu}{2\rho\delta U} = C\frac{d\delta}{dx}$$

これは、微分方程式であるため、変数分離して積分して解く。

$$\delta\, d\delta = \frac{3\mu}{2\rho CU}dx \quad \therefore \int \delta\, d\delta = \int \frac{3\mu}{2\rho CU}dx$$

$$\frac{1}{2}\delta^2 = \frac{3\mu}{2\rho CU}x + C_1 \quad \therefore \delta = \sqrt{\frac{3\mu}{\rho CU}x + C_1}$$

$\delta(0) = 0$ より、$C_1 = 0$

$$\therefore \delta = \sqrt{\frac{3\mu}{\rho CU}x}$$

（４）平板先端から x までの間に平板に働く粘性による摩擦力を、

x の関数として表しなさい。ただし、奥行き方向長さは単位長さとし、

定数 A, B には（２）で求めた値を用いること。

求める摩擦力 F は、壁面せん断応力 τ_w に微小面積を乗じたものを積分したものである。

$$F = \int \tau_w dS = \int_0^1 \int_0^x \tau_w\, dxdz$$

$$= \int_0^x \frac{3\mu U}{2\delta}\, dx = \int_0^x \frac{3\mu U}{2}\sqrt{\frac{\rho CU}{3\mu}}x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \left[2\sqrt{\frac{3\rho\mu CU^3}{4}}x^{\frac{1}{2}}\right]_0^x$$

$$\therefore F = \sqrt{3\rho\mu CU^3 x}$$

2017（H29）年度【２】略解

（１）	$\tau_w = \dfrac{\mu UA}{\delta}$
（２）	$(A, B) = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$
（３）	$\delta = \sqrt{\dfrac{3\mu}{\rho CU}x}$
（４）	$F = \sqrt{3\rho\mu CU^3 x}$

2017（H29）年度【２】講評

平行平板上の流れ（境界層）に関する基本的な問いである。ただ、図は与えられていない。正味、ニュートンの粘性法則を知っているかどうかだけ。