平成 31 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻 入学試験問題

科目名：流体力学 ［ 1 / 1 ］

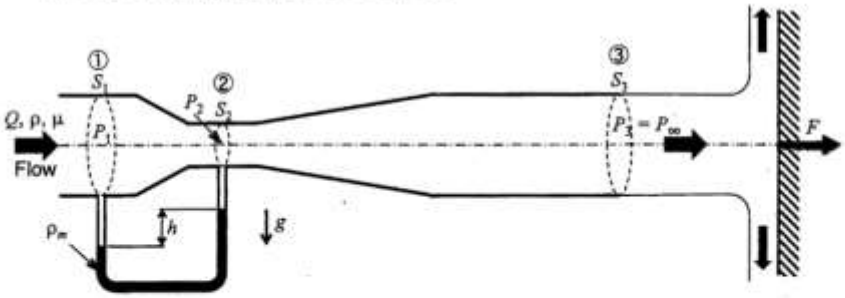
（問題[1], [2]は別々の答案用紙に解答すること.）

[1] 流れ関数 $\psi(x,y) = y/(x^2+y^2)$ により表される定常な二次元非圧縮非粘性流れについて考える. ここで, x, y は二次元デカルト座標である. 以下の問いに答えなさい.

(1) 速度 $\boldsymbol{u}$ の x, y 方向成分 u, v を求めなさい.
(2) 流線の勾配を x, y の関数として求めなさい.
(3) 流線の模式図を, xy 平面上に流れの方向もあわせて描きなさい.
(4) この流れの複素速度ポテンシャルは $f(z) = -1/z$ で与えられる. ここで, $z = x + iy$, i は虚数単位である. この流れの速度ポテンシャル ϕ を x, y の関数として求めなさい.

[2] 下図のように水平に設置された円管から噴出され, 平板に衝突する密度 ρ, 粘性係数 μ の非圧縮性粘性流体の体積流量 Q をベンチュリ管で測定している. 流れは定常であり, 流体は管入り口（断面①）, のど部（断面②）を通過後, 管路出口（断面③）から大気中（圧力 P_∞）に噴出し, 静止した鉛直無限平板に直角に衝突した後, 平板に沿って流出している. S および P は, それぞれ管断面積および圧力を示し, 添字 1, 2 および 3 は, それぞれ, 断面①, ②および③を示す. また, 断面①–②間にはマノメータが設置されており, 密度 ρ_m（$> \rho$）の液体が入れられている. 重力加速度は g とし, 以下の問いに答えなさい. ただし, 設問(1)〜(3)は粘性による損失が無視できるものとして答えなさい.

(1) 断面①–②間でベルヌーイの式を立てなさい.
(2) 断面①–②間の圧力差 $P_1 - P_2$ を ρ, Q, S_1, S_2 を用いて表しなさい.
(3) マノメータの液位差 h と体積流量 Q の関係を導きなさい.
(4) 断面①–②間で粘性による圧力損失 ΔP が発生する時, h と Q の関係を導きなさい.
(5) 平板が流体から受ける力 F と断面③における断面積 S_3 の関係を導きなさい. ただし, 噴流の断面積は S_3 と等しいとする.



2019（H31）年度【１】問題〈二重極〉

【１】流れ関数

$$\psi(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$$

により表される定常な二次元非圧縮粘性流れについて考える。

ここで、x,y は二次元デカルト座標である。以下の問いに答えなさい。

（１）速度 u の x,y 方向成分 u,v を求めなさい。

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$u=\frac{d}{dy}\{y\cdot(x^2+y^2)^{-1}\}$$

$$=(x^2+y^2)^{-1}\cdot\frac{d}{dy}y+y\cdot\left\{\frac{d}{dy}(x^2+y^2)^{-1}\right\}$$

$$=(x^2+y^2)^{-1}+y\cdot\{-(x^2+y^2)^{-2}\cdot(2y)\}$$ 〈積の微分形〉

$$=\frac{1}{(x^2+y^2)^1}+\frac{-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$ 〈商の微分形〉

$$\therefore u=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$v=-\frac{d}{dx}\{y\cdot(x^2+y^2)^{-1}\}$$

$$=-y\cdot\{-(x^2+y^2)^{-2}\cdot(2x)\}$$ 〈積の微分形〉

$$=-y\cdot\frac{0-2x}{(x^2+y^2)^2}$$ 〈商の微分形〉

$$\therefore v=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

（2）流線の勾配を x, y の関数として求めなさい。

流れ関数の勾配は次式となる。

$$\nabla\psi(x,y) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$

（1）より、

$$\therefore \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \therefore \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\nabla\psi(x,y) = \left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

（3）流線の模式図を、 xy 平面上に流れの方向もあわせて描きなさい。

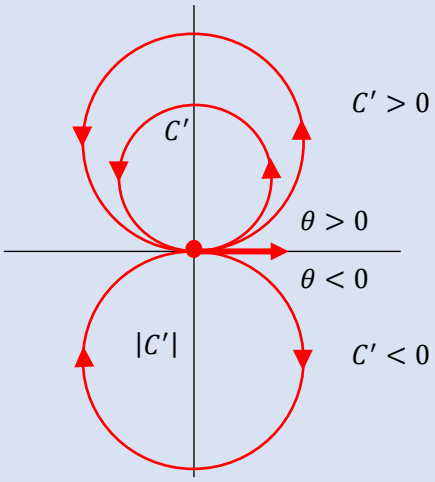
流れ関数

$$\psi(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} = const.$$

C, C' を定数、$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ として、（x, y の式でも、同様に円の方程式に）

$$\psi(x,y) = \frac{r\sin\theta}{r^2} = \frac{\sin\theta}{r} = C$$

$$\therefore r = \frac{1}{C}\cdot\sin\theta = C'\sin\theta \ (\geq 0)$$



（4）この流れの複素速度ポテンシャル

$$f(z) = -\frac{1}{z}$$

で与えられる。ここで $z = x + iy$, i は虚数単位である。

この流れの速度ポテンシャル ϕ を x, y の関数として求めなさい。

$f(z)$ に $z = x + iy$ を代入する。

$$f(x+iy) = -\frac{1}{x+iy}$$

$$= -\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = -\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$= -\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} Re\, f(z) = \phi \\ Im\, f(z) = \psi \end{cases}$$

であるので、

$$\therefore \phi = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

2019（H31）年度【1】略解

（1）	$u = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ $v = \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$
（2）	$\left(-\dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)$
（3）	略
（4）	$\phi = -\dfrac{x}{x^2 + y^2}$

2019（H31）年度【1】講評

流れ関数と速度成分、流線の方程式、複素速度ポテンシャルとお馴染みの出題である。いずれも定義をしっかりおさえておけば難なく完答できただろう。流線の図示に関して、流れ場の例はいくつかおさえておきたい。

2019（H31）年度【２】問題〈ベンチュリ管〉

（１）断面①―②間でベルヌーイの式を立てなさい。

断面①での流速を u_1,断面②での流速を u_2 とすると、ベルヌーイの式は、

$$\frac{1}{2}\rho u_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho u_2^2 + P_2$$

（２）断面①―②間の圧力差 $P_1 - P_2$ を ρ, Q, S_1, S_2 を用いて表しなさい。

（１）の結果より、

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho u_2^2 - \frac{1}{2}\rho u_1^2 = \frac{1}{2}\rho(u_2^2 - u_1^2)$$

ここで、断面①―②間で、連続の式（質量保存）より、

$$Q = u_1 S_1 = u_2 S_2$$

$$u_1 = \frac{Q}{S_1}, u_2 = \frac{Q}{S_2}$$

これを代入する。

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(u_2^2 - u_1^2) = \frac{1}{2}\rho\left\{\left(\frac{Q}{S_2}\right)^2 - \left(\frac{Q}{S_1}\right)^2\right\}$$

$$\therefore P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho Q^2\left\{\left(\frac{1}{S_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{S_1}\right)^2\right\}$$

（３）マノメータの液位差 h と体積流量 Q の関係を導きなさい。

マノメータの液位差 h から、

$$P_1 - P_2 = (\rho_m - \rho)gh$$

よって、

$$h = \frac{P_1 - P_2}{(\rho_m - \rho)g}$$

（２）の結果と上式より、

$$\therefore h = \frac{\rho Q^2}{2(\rho_m - \rho)g}\left\{\left(\frac{1}{S_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{S_1}\right)^2\right\}$$

（４）断面①―②間で粘性による圧力損失 ΔP が発生する時、h と Q の関係を導きなさい。

断面①―②間で粘性による圧力損失 ΔP を考慮したベルヌーイの式は、

$$\frac{1}{2}\rho u_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho u_2^2 + P_2 + \Delta P$$

（２）より、

$$\therefore P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(u_2^2 - u_1^2) + \Delta P = \frac{1}{2}\rho Q^2\left\{\left(\frac{1}{S_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{S_1}\right)^2\right\} + \Delta P$$

また（３）より、

$$h = \frac{P_1 - P_2}{(\rho_m - \rho)g}$$

よって、

$$\therefore h = \frac{1}{(\rho_m - \rho)g}\left[\frac{1}{2}\rho Q^2\left\{\left(\frac{1}{S_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{S_1}\right)^2\right\} + \Delta P\right]$$

（５）平板が流体から受ける力 F と断面③における断面積 S_3 の関係を導きなさい。
ただし、噴流の断面積は S_3 に等しいとする。

運動量保存則より、

$$F = \dot{M}_{in} = (Wu)_{in} = (\rho Q u)_{in} = (\rho u S u)_{in} = (\rho u^2 S)_{in}$$

よって、平板が流体から受ける力 F は、

$$F = \rho u_3^2 S_3$$

ここで、連続の式（質量保存）より、

$$Q = u_3 S_3 \quad \therefore u_3 = \frac{Q}{S_3}$$

これを代入する。

$$F = \rho\left(\frac{Q}{S_3}\right)^2 S_3$$

$$\therefore F = \frac{\rho Q^2}{S_3}$$

2019（H31）年度【２】略解

（１）	$\frac{1}{2}\rho u_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho u_2^2 + P_2$
（２）	$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho Q^2 \left\{ \left(\frac{1}{S_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{S_1}\right)^2 \right\}$
（３）	$h = \frac{\rho Q^2}{2(\rho_m - \rho)g} \left\{ \left(\frac{1}{S_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{S_1}\right)^2 \right\}$
（４）	$h = \frac{1}{(\rho_m - \rho)g} \left[\frac{1}{2}\rho Q^2 \left\{ \left(\frac{1}{S_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{S_1}\right)^2 \right\} + \Delta P \right]$
（５）	$F = \frac{\rho Q^2}{S_3}$

2019（H31）年度【２】講評

ベルヌーイの式、連続の式についての基本的な問いである。（５）では、噴流が与える力の大きさを求める際に運動量保存則の知識を用いているので注意されたい。