令和３年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：流体力学　［1/2］

（問題[1], [2]は別々の答案用紙に解答すること.）

[1] 速度ポテンシャル$\Phi(\boldsymbol{x})$を用いて，流れの速度場$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$が

$$\boldsymbol{u} = \nabla\Phi \tag{1.A}$$

と書けるとする．ここで，$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ は位置ベクトルであり，$\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ は三次元直交座標系の基底ベクトルである．

二つの項の和で表される速度ポテンシャル，

$$\Phi = \alpha y - \frac{\beta}{|\boldsymbol{x}|} \tag{1.B}$$

を考える．ただし，α，β を正の実定数とする．以下の問(1)～(5)に答えなさい．

(1) 直交座標系の速度ベクトルを$\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{e}_x + v\boldsymbol{e}_y + w\boldsymbol{e}_z$とするとき，$u$，$v$，$w$をそれぞれ求めなさい．

(2) 原点から十分離れた位置における速度の大きさを求めなさい．

(3) よどみ点の座標を求めなさい．

(4) 式(1.B)の右辺第二項は，原点からのわき出しを表している．原点からの流出量を求めなさい．

(5) 十分下流において，式(1.B)の第一項によって生じる流れと第二項によって生じる流れは，円筒状の境界面を形成する．この円筒の半径を求めなさい．

2021（R3）年度【１】問題〈一様流中のわき出し〉

【１】速度ポテンシャル

$$\Phi = \alpha y - \frac{\beta}{|\boldsymbol{x}|}$$

（１）直交座標系の速度ベクトルを $\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{e_x} + v\boldsymbol{e_y} + w\boldsymbol{e_z}$ とするとき、

u, v, w をそれぞれ求めなさい。

$$\Phi = \alpha y - \frac{\beta}{|\boldsymbol{x}|} = \alpha y - \frac{\beta}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \alpha y - \beta(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

よって、

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

であるので、

$$\therefore u = \frac{\beta}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2x) = \beta x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} = \beta \frac{x}{|\boldsymbol{x}|^3}$$

$$\therefore v = \alpha + \frac{\beta}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2y) = \alpha + \beta y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} = \alpha + \beta \frac{y}{|\boldsymbol{x}|^3}$$

$$\therefore w = \frac{\beta}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2z) = \beta z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} = \beta \frac{z}{|\boldsymbol{x}|^3}$$

（２）原点から十分離れた位置における速度の大きさを求めなさい。

十分離れた位置（$|\boldsymbol{x}| \to \infty$）において、各速度成分 u, v, w は、

（１）の結果より、

$$u = 0, \quad v = \alpha, \quad w = 0$$

よって、原点から十分離れた位置における速度の大きさは、

$$\therefore |\boldsymbol{v}| = \alpha$$

（3）よどみ点の座標を求めなさい。

よどみ点は速度が 0 となる点である。

（1）の結果より、$u = w = 0$ を解くと、

$$(x, z) = (0, 0)$$

つまり、y 軸上で v 以外は 0 となる。

よって、$v = 0$ となる y を求める。

$$v = \alpha + \beta \frac{y}{|\boldsymbol{x}|^3} = 0$$

$$\therefore \frac{|\boldsymbol{x}|^3}{y} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

① $y > 0$ のとき、$|\boldsymbol{x}| = y$ とすると、

$$\frac{y^3}{y} = y^2 = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\therefore y = \pm\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} \quad \text{（不適）}$$

② $y < 0$ のとき、$|\boldsymbol{x}| = -y$ とすると、

$$\frac{(-y)^3}{y} = -y^2 = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\therefore y = -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (\because y < 0)$$

したがって、よどみ点の座標は、

$$(x, y, z) = \left(0, -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, 0\right)$$

（４）式（1.B）の右辺第二項は、原点からのわき出しを表している。
原点からの流出量を求めなさい。

原点を中心とする半径 $|\boldsymbol{x}|$ の球面を考え、
その面を通過する流体の流量 Q は動径速度 v_r と面積 $4\pi r^2$ との積で与えられる。

$$v_r = \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\beta}{|\boldsymbol{x}|}\right)$$

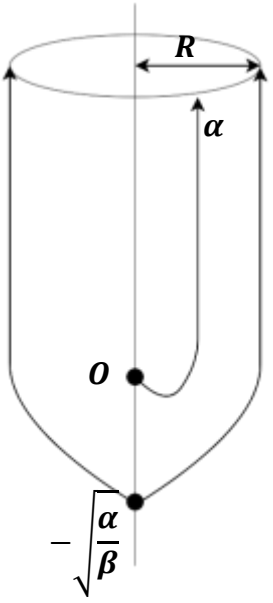
$$\therefore Q = \frac{\beta}{|\boldsymbol{x}|^2} 4\pi |\boldsymbol{x}|^2 = 4\pi\beta$$

（５）十分下流において、式（1.B）の第一項によって生じる流れと第二項によって生じる流れは、円筒状の境界面を形成する。この円筒の半径を求めなさい。

求める円筒の半径を R とすると、境界面において、
（４）の結果より、

$$4\pi\beta = \pi R^2 \alpha$$

$$\therefore R^2 = \frac{4\beta}{\alpha}$$



$$\therefore R = 2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

2021（R3）年度【1】略解

（1）	$u = \beta \dfrac{x}{\lvert \boldsymbol{x} \rvert^3}$ $v = \alpha + \beta \dfrac{y}{\lvert \boldsymbol{x} \rvert^3}$ $w = \beta \dfrac{z}{\lvert \boldsymbol{x} \rvert^3}$
（2）	$\lvert \boldsymbol{v} \rvert = \alpha$
（3）	$(x, y, z) = \left(0, -\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}, 0\right)$
（4）	$Q = 4\pi\beta$
（5）	$R = 2\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$

2021（R3）年度【1】講評

速度ポテンシャルから速度成分を求めるお馴染みの出題である。
よどみ点、わき出しなどの定義はしっかりおさえておきたい。
余裕を持って完答できる問題であった。

令和３年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：流体力学　[2/2]

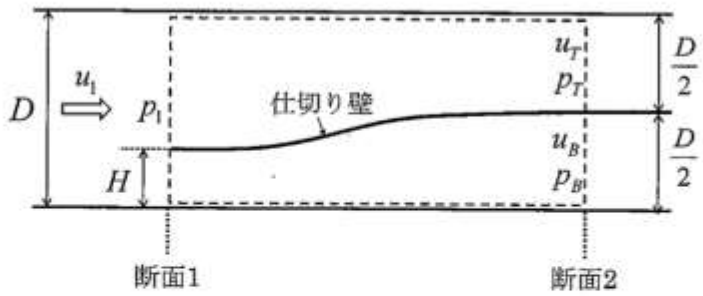
(問題[1], [2]は別々の答案用紙に解答すること.)

[2] 奥行き幅が単位長さ，高さDの矩形管内における非圧縮定常流を考える．流路内には，流れを途中から上下に分離する薄い仕切り壁が設置されている．下図の断面 1 の分離流路入口における仕切り壁の流路下面からの位置はHであり，流速，静圧をそれぞれu_1，p_1とする．また，十分下流の断面 2 における仕切り壁の位置は$D/2$であり，そこでの上段流路内の流速，静圧をそれぞれu_T，p_T，下段流路内の流速，静圧をそれぞれu_B，p_Bとする．なお，仕切り壁の位置は，Hから十分下流における$D/2$まで，単調に変化するものとする．流体の密度をρとし，粘性による損失および重力は無視するものとして，以下の問(1)～(3)に答えなさい．

(1) u_Tおよびu_Bを，u_1，H，Dにより表しなさい．

(2) p_Tおよびp_Bを，p_1，u_1，H，D，ρにより表しなさい．

(3) 下図の破線で囲まれた断面 1~2 の流体部分に運動量保存則を適用し，仕切り壁が流体から受ける主流方向の合力をu_1，H，D，ρにより表しなさい．



2021（R3）年度【２】問題〈ベルヌーイの定理〉

（１）u_T および u_B を、u_1, H, D により表しなさい。

連続の式（質量保存）より、短形管内ゆえ、

$$u_1(D-H) = u_T\frac{D}{2}$$

$$\therefore u_T = u_1\frac{2(D-H)}{D}$$

同様に、連続の式より、

$$u_1 H = u_B\frac{D}{2}$$

$$\therefore u_B = u_1\frac{2H}{D}$$

（２）p_T および p_B を、p_1, u_1, H, D, ρ により表しなさい。

ベルヌーイの定理より、各点において、次式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}\rho {u_1}^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho {u_T}^2 + p_T$$

$$\frac{1}{2}\rho {u_1}^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho {u_B}^2 + p_B$$

よって、

$$\therefore p_T = p_1 + \frac{1}{2}\rho({u_1}^2 - {u_T}^2)$$

$$\therefore p_B = p_1 + \frac{1}{2}\rho({u_1}^2 - {u_B}^2)$$

（１）の結果より、u_T, u_B を代入する。

$$\therefore p_T = p_1 + \frac{1}{2}\rho\left\{{u_1}^2 - \left(u_1\frac{2(D-H)}{D}\right)^2\right\} = p_1 + \frac{1}{2}\rho {u_1}^2\left\{1 - \frac{4(D-H)^2}{D^2}\right\}$$

$$\therefore p_B = p_1 + \frac{1}{2}\rho\left\{{u_1}^2 - \left(u_1\frac{2H}{D}\right)^2\right\} = p_1 + \frac{1}{2}\rho {u_1}^2\left(1 - \frac{4H^2}{D^2}\right)$$

（３）下図の破線で囲まれた断面１～２の流体部分に運動量保存則を適用し、
仕切り壁が流体から受ける主流方向の合力を u_1, H, D, ρ により表しなさい。

圧力差を考慮した運動量保存則より、

$$-F = \dot{M}_{in} - \dot{M}_{out} = (Wu)_{in} - (Wu)_{out} = (\rho Qu)_{in} - (\rho Qu)_{out} + (p_{in}S_{in} - p_{out}S_{out})$$

$$-F = (\rho Qu)_{in} - (\rho Qu)_{out} + (p_{in}S_{in} - p_{out}S_{out})$$

$$= \rho(u_1 D)u_1 - \left\{\rho\left(u_T \frac{D}{2}\right)u_T + \rho\left(u_B \frac{D}{2}\right)u_B\right\} + \left\{p_1 D - \left(p_T \frac{D}{2} + p_B \frac{D}{2}\right)\right\}$$

$$\therefore -F = \rho D u_1^2 - \frac{\rho D}{2}(u_T^2 + u_B^2) + \frac{D}{2}(2p_1 - p_T - p_B)$$

（１）（２）の結果より、u_T, u_B, p_T, p_B を代入する。

$$-F = \rho D u_1^2 - \frac{\rho D}{2}u_1^2\left\{\frac{4(D-H)^2}{D^2} + \frac{4H^2}{D^2}\right\} - \frac{D}{2}\left[\frac{1}{2}\rho {u_1}^2\left\{1 - \frac{4(D-H)^2}{D^2}\right\} + \frac{1}{2}\rho {u_1}^2\left(1 - \frac{4H^2}{D^2}\right)\right]$$

$$= \rho D u_1^2 - \frac{\rho D}{2}u_1^2\left\{\frac{4(D-H)^2}{D^2} + \frac{4H^2}{D^2}\right\} - \frac{\rho D}{4}u_1^2\left[\left\{1 - \frac{4(D-H)^2}{D^2}\right\} + \left(1 - \frac{4H^2}{D^2}\right)\right]$$

$$= \rho D u_1^2 - \rho D u_1^2\left\{\frac{2(D-H)^2}{D^2} + \frac{2H^2}{D^2}\right\} - \rho D u_1^2\left[\left\{\frac{1}{4} - \frac{(D-H)^2}{D^2}\right\} + \left(\frac{1}{4} - \frac{H^2}{D^2}\right)\right]$$

$$= \rho D u_1^2\left[1 - \left\{\frac{2(D-H)^2}{D^2} + \frac{2H^2}{D^2}\right\} - \left\{\frac{1}{4} - \frac{(D-H)^2}{D^2}\right\} - \left(\frac{1}{4} - \frac{H^2}{D^2}\right)\right]$$

$$= \rho D u_1^2\left[\frac{1}{2} - \frac{(D-H)^2}{D^2} - \frac{H^2}{D^2}\right]$$

$$= \frac{\rho u_1^2}{2D}[D^2 - 2(D-H)^2 - 2H^2]$$

$$= -\frac{\rho u_1^2}{2D}[D^2 - 4DH - 4H^2] = -\frac{\rho u_1^2}{2D}(D-2H)^2$$

よって、

$$\therefore F = -\frac{\rho u_1^2}{2D}(D-2H)^2$$

（壁は左向きに力を受ける）

2021（R3）年度【２】略解

（１）	$u_T = u_1 \dfrac{2(D-H)}{D}$ $u_B = u_1 \dfrac{2H}{D}$
（２）	$p_T = p_1 + \dfrac{1}{2}\rho {u_1}^2 \left\{1 - \dfrac{4(D-H)^2}{D^2}\right\}$ $p_B = p_1 + \dfrac{1}{2}\rho {u_1}^2 \left(1 - \dfrac{4H^2}{D^2}\right)$
（３）	$F = -\dfrac{\rho u_1^2}{2D}(D-2H)^2$

2021（R3）年度【２】講評

ベルヌーイの式、連続の式についての基本的な問いである。
（３）では、壁が受ける力の大きさを求める際に運動量保存則の知識を用いているので注意されたい。圧力差をしっかりと考慮する。計算ミスしそう。