2022 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：流体力学　［ 1 / 2 ］

（問題 [1], [2] は別々の答案用紙に解答すること）

[1] 複素数 $z = x + iy$ に対して，複素関数 $w(z) = \phi + i\psi$ とする．ここで，$i^2 = -1$ であり，ϕ は速度ポテンシャル，ψ は流れ関数を表している．複素速度ポテンシャル，

$$w(z) = -i\frac{A}{2\pi}\ln z, \tag{1A}$$

について以下の問いに答えなさい．ただし，A は正の実定数である．また，極座標 $z = re^{i\theta}$ を用いてもよい．

(1) 速度ポテンシャルと流れ関数を求めなさい．

(2) x 方向の流速成分 v_x と y 方向の流速成分 v_y を求めなさい．

(3) 原点を中心とする半径 R の円周 C に沿う反時計周りの周回積分が，

$$\oint_C (v_x dx + v_y dy) = A, \tag{1B}$$

となることを示しなさい．ただし，v_x と v_y はそれぞれ x 方向，y 方向の速度成分である．

(4) 原点を中心とする半径 R の円周 C に沿う反時計周りの周回積分について，$q = dw/dz$ とするとき，

$$\oint_C q dz = A, \tag{1C}$$

となることを示しなさい．

2022（R4）年度【１】問題〈渦糸〉

【１】複素速度ポテンシャル

$$w(z) = -i\frac{A}{2\pi}\ln z$$

（１）速度ポテンシャルと流れ関数を求めなさい。

$z = re^{i\theta}$ を $w(z)$ に代入する。

$$w(z) = w\left(re^{i\theta}\right) = -i\frac{A}{2\pi}\ln\left(re^{i\theta}\right)$$

$$= -i\frac{A}{2\pi}\left(\ln r + \ln e^{i\theta}\right) = -i\frac{A}{2\pi}\ln r - i\frac{A}{2\pi}\cdot(i\theta)$$

$$\therefore w(z) = \frac{A}{2\pi}\theta + i\left(-\frac{A}{2\pi}\ln r\right)$$

よって、複素速度ポテンシャルと速度ポテンシャル・流れ関数の関係は、

$$\begin{cases} Re\, w(z) = \phi \\ Im\, w(z) = \psi \end{cases}$$

であるので、

速度ポテンシャル ϕ は、

$$\therefore \phi = \frac{A}{2\pi}\theta$$

流れ関数 ψ は、

$$\therefore \psi = -\frac{A}{2\pi}\ln r$$

（2）x 方向の流速成分 v_x と y 方向の流速成分 v_y と求めなさい。

$w'(z)$ を求める。

$$w'(z) = -i\frac{A}{2\pi}\cdot\frac{1}{z}$$

$z = re^{i\theta}$ を $w'(z)$ に代入する。

$$w'\left(re^{i\theta}\right) = -i\frac{A}{2\pi}\cdot\frac{1}{re^{i\theta}}$$

オイラーの公式より、

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\therefore w'\left(re^{i\theta}\right) = -i\frac{A}{2\pi}\cdot\frac{e^{-i\theta}}{r} = -i\frac{A}{2\pi r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

分母を有理化する。

$$\therefore w'(z) = -\frac{A}{2\pi r}\sin\theta + i\left(-\frac{A}{2\pi r}\cos\theta\right)$$

よって、

$$\begin{cases} Re\, w'(z) = v_x \\ Im\, w'(z) = -v_y \end{cases}$$

であるので、

x 方向の流速成分 v_x は、

$$\therefore v_x = -\frac{A}{2\pi r}\sin\theta$$

y 方向の流速成分 v_y は、

$$\therefore v_y = \frac{A}{2\pi r}\cos\theta$$

（３）原点を中心とする半径 R の円周 C に沿う反時計回りの周回積分が

$$\oint_C \left(v_x dx + v_y dy\right) = A$$

となることを示しなさい。

（２）の結果より、

$$\oint_C \left(v_x dx + v_y dy\right) = \oint_C \left(-\frac{A}{2\pi r}\sin\theta\, dx + \frac{A}{2\pi r}\cos\theta\, dy\right)$$

$$= \frac{A}{2\pi r}\oint_C \left(-\sin\theta\, dx + \cos\theta\, dy\right)$$

ここで、直交座標・極座標の関係は、

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$dx = -r\sin\theta\, d\theta, \quad dy = r\cos\theta\, d\theta$$

よって、

$$\oint_C \left(v_x dx + v_y dy\right) = \frac{A}{2\pi r}\int_0^{2\pi} -\sin\theta\cdot(-r\sin\theta\, d\theta) + \cos\theta\cdot(r\cos\theta\, d\theta)$$

$$= \frac{A}{2\pi r}\cdot r\int_0^{2\pi} (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= A$$

$$\therefore \oint_C \left(v_x dx + v_y dy\right) = A \quad \blacksquare$$

（4）原点を中心とする半径 R の円周 C に沿う反時計回りの周回積分について、

$q = dw/dz$ とするとき、

$$\oint_C q dz = A$$

となることを示しなさい。

（2）より、

$$q = \frac{dw}{dz} = w'(z) = -i\frac{A}{2\pi}\cdot\frac{1}{z}$$

$$\oint_C q dz = \oint_C \left(-i\frac{A}{2\pi}\cdot\frac{1}{z}\right)dz = -i\frac{A}{2\pi}\oint_C \frac{dz}{z}$$

$z = re^{i\theta}$ より、

$$dz = ire^{i\theta}d\theta$$

よって、

$$\therefore \oint_C q dz = -i\frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta = \frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta = A$$

$$\therefore \oint_C q dz = A$$ ■

2022（R4）年度【1】略解

（1）	$\phi = \frac{A}{2\pi}\theta$ $\psi = -\frac{A}{2\pi}\ln r$
（2）	$v_x = -\frac{A}{2\pi r}\sin\theta$ $v_y = \frac{A}{2\pi r}\cos\theta$
（3）	略
（4）	略

2022（R4）年度【1】講評

複素速度ポテンシャルから速度ポテンシャルと流れ関数を求めるお馴染みの出題である。いずれも定義をしっかりおさえておけば難なく完答できただろう。

オイラーの公式は絶対覚えておく必要があるが、基本的には実部と虚部を求める際に使う程度で、無理に使わない方が計算過程は綺麗。計算を煩雑にしないように心がけたい。

2022 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：流体力学　［ 2 / 2 ］

（問題 [1], [2] は別々の答案用紙に解答すること）

[2] 密度 ρ_P，直径 d の球形粒子が，無限に広い静止液体（密度 ρ_L ($< \rho_P$)，粘性係数 μ）中を速度 $u(t)$ (≥ 0) で沈降している．ここで，t は時間である．粒子速度は次の運動方程式に従うものとする．

$$\rho_P \frac{\pi d^3}{6}\frac{du}{dt} = (\rho_P - \rho_L)g\frac{\pi d^3}{6} - 3\pi\mu u d \tag{2A}$$

ここで，g は重力加速度である．初速度を $u(0) = 0$，十分に時間が経過したときの終端沈降速度を $u(\infty) = U$ とする（g, U は正定数）．以下の問いに答えなさい．

(1) U を ρ_P, ρ_L, μ, g, d を用いて表しなさい．

(2) 粒子が沈降を開始してから速度が $(1 - e^{-1})U$ となるまでに要する時間を ρ_P, μ, d を用いて表しなさい．ここで e はネイピアの数（自然対数の底）である．

(3) 式 (2A) を無次元量 $u^* = u/U$, $t^* = Ut/d$, $\rho^* = \rho_P/\rho_L$ を用いて表すと次式となる．

$$\rho^* \frac{du^*}{dt^*} = \frac{1}{A^2} - \frac{18}{B}u^* \tag{2B}$$

無次元数 A, B を ρ_P, ρ_L, μ, g, d, U から適当な記号を用いて表しなさい．

(4) 終端沈降状態において抗力の大きさは $|F_D| = 3\pi\mu U d$ である．抗力係数を $C_D = |F_D|/(\pi\rho_L U^2 d^2/8)$ と定義するとき，C_D を B を用いて表しなさい．

(5) 次の文章の（ a ），（ b ）に入る適当な語句をそれぞれ答えなさい．「問 (4) の形で抗力が与えられるのは B が 1 よりも十分に小さいときである．一方 B を増加させていくと，ある範囲では C_D は概ね一定となる．後者では（ a ）抵抗よりも（ b ）抵抗が支配的である．」

2022（R4）年度【２】問題〈抗力〉

（１）U を$\rho_P, \rho_L, \mu, g, d$ を用いて表しなさい。

十分に時間が経過したときの終端速度 $u(\infty) = U$ は一定値ゆえ、

$$\frac{du(\infty)}{dt} = 0$$

与式（2A）に、$du/dt = 0$, $u = U$ を代入すると、

$$0 = (\rho_P - \rho_L)g\frac{\pi d^3}{6} - 3\pi\mu U d$$

これを U について整理する。

$$\therefore U = \frac{(\rho_g - \rho_L)gd^2}{18\mu}$$

（２）粒子が沈降を開始してから速度が $(1 - e^{-1})U$ となるまでに要する時間を ρ_P, μ, d を用いて表しなさい。ここで e はネイピアの数（自然対数の底）である。

運動方程式（微分方程式）を解く。

$$\frac{du}{dt} = \frac{(\rho_P - \rho_L)g}{\rho_P} - \frac{18\mu u}{\rho_P d^2}$$

まず、斉次方程式を解く。

$$\frac{du}{dt} = -\frac{18\mu}{\rho_P d^2}u$$

変数分離を行って、積分する。

$$\frac{du}{u} = -\frac{18\mu}{\rho_P d^2}dt, \quad \ln u = -\frac{18\mu}{\rho_P d^2}t + C$$

$$\therefore u = \exp\left(-\frac{18\mu}{\rho_P d^2}t + C\right) = C_1 \exp\left(-\frac{18\mu}{\rho_P d^2}t\right)$$

よって、非斉次方程式の特殊解は（１）で求めた U であるので、一般解は次式となる。

$$\therefore u = C_1 \exp\left(-\frac{18\mu}{\rho_P d^2}t\right) + U$$

また、初期条件 $u(0) = 0$ より、$C_1 = -U$

したがって、

$$\therefore u = -U\exp\left(-\frac{18\mu}{\rho_P d^2}t\right) + U = \left\{1 - \exp\left(-\frac{18\mu}{\rho_P d^2}t\right)\right\}U$$

速度が $(1-e^{-1})U$ となるとき、上式に代入すると、

$$(1-e^{-1})U = \left\{1 - \exp\left(-\frac{18\mu}{\rho_P d^2}t\right)\right\}U$$

よって、両辺比較すると、

$$\therefore t = \frac{\rho_P d^2}{18\mu}$$

【誤答】等速直線運動だと思って、解き進めてはいけない。

初速度 v_0 , 加速度 $a\ (=dv/dt)$, が与えられた物体の $t\ [s]$ 後の速度 v は次式となる。

$$v = v_0 + at$$

ここで、加速度 $a\ (=dv/dt)$ は与式（2A）より、

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{(\rho_P - \rho_L)g}{\rho_P} - \frac{18\pi\mu(1-e^{-1})U}{\rho_P d^2} = \frac{(\rho_P - \rho_L)gd^2 - 18\pi\mu(1-e^{-1})U}{\rho_P d^2}$$

初速度 $v_0 = 0$ なので、

$$(1-e^{-1})U = \left\{\frac{(\rho_P - \rho_L)gd^2 - 18\pi\mu(1-e^{-1})U}{\rho_P d^2}\right\}t$$

$$\therefore t = \frac{(1-e^{-1})U\rho_P d^2}{(\rho_P - \rho_L)gd^2 - 18\pi\mu(1-e^{-1})U}$$

（１）の結果を用いると、

$$(\rho_P - \rho_L)gd^2 = 18\mu U$$

これを代入して、時間 t を ρ_P, μ, d を用いて表すと、

$$\therefore t = \frac{(1-e^{-1})U\rho_P d^2}{18\mu U - 18\pi\mu(1-e^{-1})U}$$

ダメ～～～～～！（トムブラウン布川風）

（３）式（2A）を無次元量 $u^* = u/U\,, t^* = Ut/d\,, \rho^* = \rho_P/\rho_L$ を用いて表すと次式となる。

$$\rho^* \frac{du^*}{dt^*} = \frac{1}{A^2} - \frac{18}{B} u^* \qquad (2B)$$

無次元数 $A\,, B$ を $\rho_P, \rho_L, \mu, g, d, U$ から適当な記号を用いて表しなさい。

与式（2B）に各無次元量を代入して、与式（2A）と比較する。

$$(\rho_P/\rho_L)\frac{d(u/U)}{d(Ut/d)} = \frac{1}{A^2} - \frac{18}{B}(u/U)$$

$$\rho_P d \frac{du}{dt} \cdot \left(\frac{1}{\rho_L U^2}\right) = \frac{1}{A^2} - \frac{18}{B}\left(\frac{u}{U}\right)$$

左辺を与式（2A）に合わせる。

$$\rho_P \frac{\pi d^3}{6}\frac{du}{dt} = \frac{1}{A^2} \cdot \rho_L U^2 \left(\frac{\pi d^2}{6}\right) - \frac{18}{B}\left(\frac{u}{U}\right) \cdot \rho_L U^2 \left(\frac{\pi d^2}{6}\right)$$

よって、

$$\begin{cases} (\rho_P - \rho_L) g \dfrac{\pi d^3}{6} = \dfrac{1}{A^2} \cdot \rho_L U^2 \left(\dfrac{\pi d^2}{6}\right) \\ 3\pi\mu u d = \dfrac{18}{B}\left(\dfrac{u}{U}\right) \cdot \rho_L U^2 \left(\dfrac{\pi d^2}{6}\right) \end{cases}$$

これを解いて、

$$\therefore \begin{cases} A^2 = \dfrac{\rho_L U^2}{(\rho_P - \rho_L) g d} \\ B = \dfrac{\rho_L U d}{\mu} \end{cases}$$

したがって、

$$\therefore \begin{cases} A = U\sqrt{\dfrac{\rho_L}{(\rho_P - \rho_L) g d}} \\ B = \dfrac{\rho_L U d}{\mu} \end{cases}$$

（４）終端沈降状態において抗力の大きさは $|F_D| = 3\pi\mu ud$ である。抗力係数を

$$C_D = \frac{|F_D|}{\pi\rho_L U^2 d^2/8}$$

と定義するとき、C_D を B を用いて表しなさい。

$$C_D = \frac{|F_D|}{\pi\rho_L U^2 d^2/8}$$

$$= \frac{3\pi\mu Ud}{\pi\rho_L U^2 d^2/8} = \frac{24\mu}{\rho_L Ud} = 24 \cdot \frac{1}{\frac{\rho_L Ud}{\mu}}$$

$$\therefore C_D = \frac{24}{B}$$

（５）次の文章の（　a　），（　b　）に入る適当な語句をそれぞれ答えなさい。

「問（４）の形で抗力が与えられるのは B が１よりも十分に小さいときである。

一方 B を増加させていくと、ある範囲では C_D は概ね一定となる。

後者では（　a　）抵抗よりも（　b　）抵抗が支配的である。」

（　a　）…　粘性

（　b　）…　慣性

2022（R4）年度【２】略解

（１）	$U=\dfrac{(\rho_g-\rho_L)gd^2}{18\mu}$
（２）	$t=\dfrac{\rho_P d^2}{18\mu}$
（３）	$A=U\sqrt{\dfrac{\rho_L}{(\rho_P-\rho_L)gd}}$ $B=\dfrac{\rho_L U d}{\mu}$
（４）	$C_D=\dfrac{24}{B}$
（５）	（　a　）…　粘性 （　b　）…　慣性

2022（R4）年度【２】講評

抗力に関する基本的な問いで、特に知識を必要とする問いは（５）のみであった。

B は、レイノルズ数を示しており、その物理的意味に関しておさえておきたい。