1. つぎの各問いに答えよ.

(1) $z = z(x, y)$ は C^2 級とする. $x = t^2 - s^2$, $y = 2ts$ とするときに, z は t と s の2変数関数とみなせるが, そのとき, つぎの等式を示せ.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{4(t^2+s^2)}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right), \quad (t, s) \neq (0, 0)$$

(2) x, y, z を実数とする. つぎの等式を示せ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

2. $R > 1$ を実数とし, 始点を $-R$, 終点を R とする複素平面の実軸上の線分を ℓ, 始点を R とし, 中心0, 半径 R の円周上を Ri を経由して終点 $-R$ に至る曲線を Γ とする. $C = \ell \cup \Gamma$ とおく.

(1) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z^2+1)^2}$ の値を求めよ.

(2) $R \to \infty$ のとき, $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{(z^2+1)^2} \to 0$ となることを示せ.

(3) (1), (2) の結果をもとに, 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ の値を求めよ.

3. 関数 $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2}, & 0 < x < \pi, \\ -\cos\dfrac{x}{2}, & -\pi < x < 0 \end{cases}$ を考える. $f(x)$ を周期 2π の関数に拡張した関数を, 記号を変えずに $f(x)$ で表す.

(1) $f(x)$ を以下のようにフーリエ級数展開するとき, 各係数 a_0, a_k, b_k の値を求めよ.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

(2) (1) の結果とパーセバルの等式を利用して, 級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(4k^2-1)^2}$ の値を求めよ.

4. $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \geq 0$ に関する微分方程式系

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = \sqrt{2} \qquad (*)$$

を考える.

(1) $(*)$ の解 $x(t), y(t)$ を求めよ.

(2) (1) で求めた解に対して, $(x(t), y(t))$ はパラメータ $t \geq 0$ が増加するにつれて, xy 平面上でどのような曲線の軌道を描くか述べよ.

2017（H29）年度【1】問題〈微分積分・線形代数〉

（1）$z=z(x,y)$ は C^2 級とする。$x=t^2-s^2, y=2ts$ とするときに、z は t と s の 2 変数関数とみなせるが、そのとき、次の等式を示せ。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{4(t^2+s^2)}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right),\quad (t,s)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 2t+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot 2s$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 2t+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot 2s\right)\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 2t+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot 2s\right)\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 2t+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot 2s\right)2t+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 2t+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot 2s\right)2s$$

$$=(2t)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+8st\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+(2s)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

また、

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-2s)+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot 2t$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-2s)+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot 2t\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-2s)+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot 2t\right)\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-2s)+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot 2t\right)(-2s)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-2s)+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot 2t\right)2t$$

$$=(-2s)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-8st\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+(2t)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

以上より、

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(4t^2+4s^2)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(4t^2+4s^2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}=4(t^2+s^2)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

よって、

$$\therefore\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{4(t^2+s^2)}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)\quad\blacksquare$$

（２）x,y,z を実数とする。つぎの等式を示せ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \\ &= yz^2 + zx^2 + xy^2 - yx^2 - xz^2 - zy^2 \\ &= (y-x)z^2 - (z-x)y^2 + (z-y)x^2 \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= (y-x)(z-x)(z-y) \\ &= (yz - xy - zx + x^2)(z-y) \\ &= yz^2 - xyz - xz^2 + zx^2 - zy^2 + xy^2 + xyz - yx^2 \\ &= (y-x)z^2 - (z-x)y^2 + (z-y)x^2 \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y) \quad \blacksquare$$

★サラスの公式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - ceg - bdi - fha$$

2017（H29）年度【２】問題〈複素関数〉

【２】$R>1$ を実数とし、始点を$-R$, 終点を R とする複素平面の実軸上の線分を ℓ, 始点を R とし、中心 0, 半径 R の円周上を Ri を経由して終点$-R$ に至る曲線を Γ とする。$C=\ell\cup\Gamma$ とおく。

（１）複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z^2+1)^2}$ の値を求めよ。

・留数定理

関数 $f(z)$ が正則で、ある領域内に描かれた単一閉曲線 C があり、

C の内部で $f(z)$ はその極 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 以外の点では正則であるとする。このとき、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \mathrm{Res}[f,a_1]+\mathrm{Res}[f,a_2]+\cdots+\mathrm{Res}[f,a_m]$$

・留数の求め方

点 a が関数 $f(z)$ の 1 位の極であれば、

$$\mathrm{Res}[f,a]=\lim_{z\to a}[(z-a)f(z)]$$

点 a が関数 $f(z)$ の 2 位の極であれば、

$$\mathrm{Res}[f,a]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to a}\left[\frac{d}{dz}(z-a)^2 f(z)\right]$$

$$\frac{1}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

ここで、

$$\mathrm{Res}[f(z),i]=\lim_{z\to i}\left[\frac{d}{dz}(z-i)^2\frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}\right]=\lim_{z\to i}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right]=\frac{-i}{4}$$

よって、留数定理より、

$$\therefore \int_C \frac{dz}{(z^2+1)^2}=2\pi i\cdot\left(\frac{-i}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

（２） $R \to \infty$ のとき、$\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{(z^2+1)^2} \to 0$　となることを示せ。

$|z| = R, \quad |dz| = \pi R, \quad |z^2+1| \geq |z|^2 - 1$ を利用すると、

$$\left|\int_\Gamma \frac{dz}{(z^2+1)^2}\right| \leq \int_\Gamma \frac{|dz|}{|(z^2+1)^2|}$$

$$\leq \int_\Gamma \frac{|dz|}{(|z|^2-1)^2}$$

$$= \frac{\pi R}{(R^2-1)^2}$$

よって、

$$0 \leq \left|\int_\Gamma \frac{dz}{(z^2+1)^2}\right| \leq \int_\Gamma \frac{|dz|}{(|z|^2-1)^2}$$

したがって、はさみうちの定理より、

$$\therefore \lim_{R\to\infty} \int_\Gamma \frac{dz}{(z^2+1)^2} \to 0$$

（３）（１）と（２）の結果をもとに

定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ の値を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \int_\ell \frac{dz}{(z^2+1)^2}$$

（１）（２）の結果より、

$$\int_\ell \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \int_C \frac{dz}{(z^2+1)^2}$$

よって、

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

2017（H29）年度【３】問題〈フーリエ解析〉

【３】

関数 $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{x}{2}, & 0<x<\pi, \\ -\cos\frac{x}{2}, & -\pi<x<0\end{cases}$ を考える。

（１）$f(x)$ を以下のようにフーリエ級数展開するとき、各係数 a_0, a_k, b_k の値を求めよ。

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}\left(-\cos\frac{x}{2}\right)dx+\int_{0}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left[-2\sin\frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{0}+\left[2\sin\frac{x}{2}\right]_{0}^{\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\{-2(0+1)+2(1-0)\}=0$$

【別解】

奇関数であることに注意すると、計算するまでもない。

$$\therefore a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}\left(-\cos\frac{x}{2}\right)\cos kx\,dx+\int_{0}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos kx\,dx\right\}$$

普通に計算していこうとすると、三角関数の積和の公式を使う必要がある。

しかし、奇関数と偶関数の積は奇関数であることに注意すると、計算するまでもない。

$$\therefore a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

ここで、**奇関数**と**奇関数**の**積**は**偶関数**であることに注意する

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\sin kx\;\,dx$$

・三角関数の積和の公式（加法定理からすぐ導ける）

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

積和の公式より、

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin kx\cos\frac{x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left\{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x + \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right\}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{2}{2k+1}\cos\left(\frac{2k+1}{2}\right)x\right]_0^{\pi} + \left[-\frac{2}{2k-1}\cos\left(\frac{2k-1}{2}\right)x\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{2}{2k+1}(0-1) - \frac{2}{2k-1}(0-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{2k+1}+\frac{2}{2k-1}\right) = \frac{8k}{\pi(4k^2-1)}$$

よって、各係数 a_0, a_k, b_k の値は、

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{8k}{\pi(4k^2-1)}$$

（2）（1）の結果とパーセバルの等式を利用して、

級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{(4k^2-1)^2}$ の値を求めよ。

・パーセバルの等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$$

ここで、**奇関数と奇関数の積は偶関数**であることに注意する。

まず、パーセバルの等式の左辺を求める。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos^2\frac{x}{2}\,dx\\&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1+\cos x}{2}\,dx\\&=\frac{1}{\pi}[x+\sin x]_0^{\pi}\\&=\frac{1}{\pi}\{(\pi-0)+(0-0)\}=1\end{aligned}$$

次に、パーセバルの等式の左辺を求める。

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{64k^2}{\pi^2(4k^2-1)^2}$$

よって、

$$1=\frac{64}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{(4k^2-1)^2}$$

$$\therefore\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{(4k^2-1)^2}=\frac{\pi^2}{64}$$

2017（H29）年度【４】問題〈微分方程式〉

【４】$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \geq 0$ に関する微分方程式系

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = \sqrt{2} \qquad (*)$$

を考える。

（１）$(*)$ の解 $x(t), y(t)$ を求めよ。

$$\frac{dy}{dt} = 2x \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\frac{dy}{dt}$$

より、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

よって、第１式に代入すると、y だけの２階線形同次微分方程式になる。

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = 0$$

特性方程式

$$\lambda^2 + 2 = 0$$

を解くと、

$$\lambda = \pm\sqrt{2}i$$

任意定数 C_1, C_2 を用いて、複素数解（重解）の同次微分方程式の一般解 $y(t)$ は以下となる。

$$\therefore y(t) = C_1 \cos\sqrt{2}t + C_2 \sin\sqrt{2}t$$

また、

$$x = \frac{1}{2}\frac{dy}{dt} = -\frac{\sqrt{2}}{2}C_1 \sin\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}C_2 \cos\sqrt{2}t$$

よって、

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}C_1 \sin\sqrt{2}t + \dfrac{\sqrt{2}}{2}C_2 \cos\sqrt{2}t \\ y(t) = C_1 \cos\sqrt{2}t + C_2 \sin\sqrt{2}t \end{cases}$$

初期条件 $x(0)=1,\quad y(0)=\sqrt{2}$ より、

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}C_2=1\\ C_1=\sqrt{2}\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}C_1=\sqrt{2}\\ C_2=\sqrt{2}\end{cases}$$

任意定数 C_1, C_2 を代入する。

$$\therefore\begin{cases}x(t)=\cos\sqrt{2}t-\sin\sqrt{2}t\\ y(t)=\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t+\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\end{cases}$$

（2）（1）で求めた解に対して、$\big(x(t),y(t)\big)$ はパラメータ $t\geq 0$ が増加するにつれて、xy 平面上でどのような曲線の軌道を描くか述べよ。

媒介変数 t を消去する。ここで、三角関数の関係を使いたいので 2 乗することは思いつく。

$$x^2(t)=\big(\cos\sqrt{2}t-\sin\sqrt{2}t\big)^2=1-2\cos\sqrt{2}t\sin\sqrt{2}t$$

$$y^2(t)=\big(\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t+\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\big)^2=2+4\cos\sqrt{2}t\sin\sqrt{2}t$$

よって、

$$2x^2(t)+y^2(t)=4$$

したがって、

$$\therefore\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$$

xy 平面上で楕円を描く。

2017（H29）年度 講評

【1】連鎖律。サラスの公式。

【2】留数定理は知っておく。不等式の評価から定積分を求めていくお馴染みの流れ。

【3】フーリエ係数の求め方、パーセバルの等式の扱い方は知っておく。
偶関数・奇関数の取り扱いで計算量がグンと減る。

【4】連立微分方程式。文字を消去して、ただの二階線形微分方程式に帰着させる。
パラメータ t をいじって、グラフ考える問題、大学受験神大 2 次を彷彿とさせるなあ。
今回はすぐに文字消去できるから、見かけ倒し。