1. つぎの各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)=\tan^{-1}(x-y)-\frac{1}{4}x+\frac{1}{12}y^3,\ x,y\in\mathbf{R}$ の極値を求めよ．ただし，$\tan^{-1}x$ は $\tan u,\ -\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$ の逆関数を表わす．

(2) 複素正方行列 A に対し，その共役転置行列を A^* と表わす．つぎの行列 A はユニタリ行列であることを示し，その固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A=\begin{pmatrix} \frac{i}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

ここで $A^*A=I$ が成立するとき，A をユニタリ行列という．ただし I は単位行列である．

2. 複素指数関数 e^z を用いて，$f(z)=\dfrac{1}{e^z+1}$ と定義する．

(1) $f(z)$ の特異点をすべて求めよ．

(2) (1) の各特異点における $f(z)$ の留数を求めよ．

(3) C を，原点を中心として反時計方向に向き付けられた半径5の円とする．このとき，複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$ の値を求めよ．

3. n を自然数とし，$f_n(x)=\begin{cases} 0, & (x<0), \\ x^ne^{-x}, & (x\geq 0) \end{cases}$ を考える．

(1) $f_1(x)$ のフーリエ変換 $\hat{f}_1(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)e^{-itx}dx,\ -\infty<t<\infty$ を求めよ．

(2) 一般の自然数 n に対して，$f_n(x)$ のフーリエ変換を求めよ．

4. $y_1=y_1(x),\ y_2=y_2(x),\ x>0$ に関する微分方程式系

$$y_1'=y_1+y_2,\quad y_2'=\frac{y_1}{x}+\frac{y_2}{x} \qquad (*)$$

を考える．

(1) $z=y_1+y_2$ とおく．z の満たす1階常微分方程式を示し，その一般解を求めよ．

(2) 微分方程式系 $(*)$ の一般解を求めよ．

(3) 次の微分方程式系の解を，初期条件 $y_1(1)=1,\ y_2(1)=0$ のもとで求めよ．

$$y_1'=y_1+y_2,\quad y_2'=\frac{y_1}{x}+\frac{y_2}{x}-x^2$$

2018（H30）年度【1】問題〈微分積分・線形代数〉

（1）関数 $f(x,y)=\tan^{-1}(x-y)-\frac{1}{4}x+\frac{1}{12}y^3,\quad x,y\in\mathbb{R}$ の極値を求めよ。

ただし、$\tan^{-1}x$ は $\tan u,\quad -\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$ の逆関数を表わす。

$$f_x=\frac{1}{1+(x-y)^2}-\frac{1}{4},\quad f_y=\frac{-1}{1+(x-y)^2}+\frac{1}{4}y^2$$

★逆関数の微分（$\tan^{-1}x$）

$x=\tan y$ を y で微分する。

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$x=\tan y$ を代入する。

$$(\tan^{-1}x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

$f_x=f_y=0$ より、

$$\frac{1}{1+(x-y)^2}=\frac{1}{4}y^2=\frac{1}{4}$$

$$\therefore (x-y)^2=3,\quad y=\pm1$$

$$f_{xx}=\frac{-2(x-y)}{\{1+(x-y)^2\}^2},\quad f_{yy}=\frac{-2(x-y)}{\{1+(x-y)^2\}^2}+\frac{1}{2}y,\quad f_{xy}=\frac{2(x-y)}{\{1+(x-y)^2\}^2}$$

$H={f_{xy}}^2-f_{xx}f_{yy}$ を求める。

$$H=\frac{4(x-y)^2}{\{1+(x-y)^2\}^4}+\frac{2(x-y)}{\{1+(x-y)^2\}^2}\left[\frac{-2(x-y)}{\{1+(x-y)^2\}^2}+\frac{1}{2}y\right]$$

$$=\frac{y(x-y)}{\{1+(x-y)^2\}^2}$$

$f(x,y)$ が極値を持つためには、$H<0$ を満たす必要がある。

よって、これを満たす (x,y) は、

$$\therefore (x,y)=\left(1-\sqrt{3},1\right),\quad \left(-1+\sqrt{3},-1\right)$$

したがって、$f(x,y)$ の極値は、

$$f\left(1-\sqrt{3},1\right)=\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)-\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{3}\right)+\frac{1}{12}$$

$$=-\frac{\pi}{3}-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

このとき、$f_{xx}>0$ となり、極小値となる。

$$f\left(-1+\sqrt{3},-1\right)=\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)-\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{3}\right)-\frac{1}{12}$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

このとき、$f_{xx}<0$ となり、極大値となる。

・極大値　$(x,y)=\left(-1+\sqrt{3},-1\right)$ のとき

$$\frac{\pi}{3}+\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

・極小値　$(x,y)=\left(1-\sqrt{3},1\right)$ のとき

$$-\frac{\pi}{3}-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

（2）複素正方行列 A に対し、その共役転置行列 A^* と表わす。

つぎの行列 A はユニタリ行列であることを示し、

その固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$A=\begin{pmatrix}\frac{i}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{i}{2}\end{pmatrix}$$

ここで $A^*A=I$ が成立するとき、A をユニタリ行列という。

ただし、I は単位行列である。

$$|A|=\begin{vmatrix}\frac{i}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{i}{2}\end{vmatrix}=1$$

$$A^*=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & i\end{pmatrix}$$

$$A^*A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & i\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -i\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$ ■

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}\frac{i}{2}-\lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{i}{2}-\lambda\end{vmatrix}=-\left(-\frac{1}{4}-\lambda^2\right)+\frac{3}{4}$$

$$=\lambda^2+1$$

$$=(\lambda+i)(\lambda-i)$$

固有方程式 $|A-\lambda I|=(\lambda+i)(\lambda-i)=0$ を解くと、固有値は以下の 2 つの値となる。

$$\therefore \lambda=i,-i$$

(i) $\lambda = i$ のとき

$$\begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -ix - \sqrt{3}y = 0 \\ \sqrt{3}x - 3iy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{i}{\sqrt{3}}x$$

s_1 を任意定数として、

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s_1 \begin{pmatrix} \sqrt{3}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $\lambda = -i$ のとき

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3ix - \sqrt{3}y = 0 \\ \sqrt{3}x + iy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{3}ix$$

s_2 を任意定数として、

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}i \end{pmatrix}$$

2018（H30）年度【２】問題〈複素関数〉

【２】複素指数関数 e^z を用いて、

$$f(z)=\frac{1}{e^z+1}$$ と定義する。

（１）$f(z)$ の特異点をすべて求めよ。

$e^z+1=0$ を解く。

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=-1$$

オイラーの公式より、

$$e^x(\cos y+i\sin y)=-1$$

実部と虚部を比較して、

$$\begin{cases} e^x\cos y=-1 \\ e^x\sin y=0 \end{cases}$$

$e^x\neq 0$ より、

$$\sin y=0$$

n を整数として、

$$y=n\pi$$

また、$e^x\cos y=-1$ を満たすとき、

$$e^x=1,\quad \cos y=-1$$

以上より、

$$\therefore x=0,\quad y=(2n+1)\pi$$

よって、求めたい特異点は n を整数として、

$$\therefore z=(2n+1)\pi i$$

（２）（１）の各特異点における $f(z)$ の留数を求めよ。

・留数の求め方

点 a が関数 $f(z)$ の１位の極であれば、

$$\mathrm{Res}[f,a]=\lim_{z\to a}[(z-a)f(z)]$$

ロピタルの定理を用いる。

$$\lim_{z\to(2n+1)\pi i}\left[\{z-(2n+1)\pi i\}\frac{1}{e^z+1}\right]=\lim_{z\to(2n+1)\pi i}\left[\frac{1}{e^z}\right]=\frac{1}{e^{i(2n+1)\pi}}=e^{-i(2n+1)\pi}$$

ここで、オイラーの公式より、

$$\begin{aligned}e^{-i(2n+1)\pi}&=\cos(2n+1)\pi-i\sin(2n+1)\pi\\&=-1+0\end{aligned}$$

よって、

$$\therefore \mathrm{Res}[f(z),(2n+1)\pi i]=-1$$

（３）C を、原点を中心として反時計方向に向き付けられた半径５の円とする。

このとき、複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の値を求めよ。

・留数定理

関数 $f(z)$ が正則で、ある領域内に描かれた単一閉曲線 C があり、

C の内部で $f(z)$ はその極 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 以外の点では正則であるとする。このとき、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz=\mathrm{Res}[f,a_1]+\mathrm{Res}[f,a_2]+\cdots+\mathrm{Res}[f,a_m]$$

（２）の結果より、

半径５の円の内部に含まれる特異点における留数は $n=-1,0$ のときであるので、

$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i(-1-1)=-4\pi i$$

2018（H30）年度【3】問題〈フーリエ解析〉

【3】n を自然数とし、

$$\text{関数 } f_n(x) = \begin{cases} 0, & (x < 0), \\ x^n e^{-x}, & (x \geq 0) \end{cases} \quad \text{を考える。}$$

（1）$f_1(x)$ のフーリエ変換

$$\hat{f}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-itx}\, dx, \quad -\infty < t < \infty \quad \text{を求めよ。}$$

$$\hat{f}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^1 e^{-x} \cdot e^{-itx}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x e^{-(it+1)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[\frac{x}{-(it+1)} e^{-(it+1)x} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{-(it+1)} e^{-(it+1)x} \right) dx \right\}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{(it+1)^2} e^{-(it+1)x} \right]_0^{\infty}$$

$$\therefore \hat{f}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(it+1)^2}$$

ここで、

$$\lim_{x \to \infty} e^{-(it+1)x} = \lim_{x \to \infty} e^{-itx} \cdot e^{-x} = 0$$

は断りなく用いている。また、指数関数がべき関数より収束が早いことは自明。

（２）一般の自然数 n に対して、$f_n(x)$ のフーリエ変換を求めよ。

$$\hat{f}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x}\cdot e^{-itx}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} x^n e^{-(it+1)x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[\frac{x^n}{-(it+1)}e^{-(it+1)x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(\frac{nx^{n-1}}{-(it+1)}e^{-(it+1)x}\right)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(it+1)}e^{-(it+1)x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{n}{it+1}\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-(it+1)x}\,dx = \frac{n}{it+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-(it+1)x}\,dx$$

ここで、

$$\hat{f}_{n-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-(it+1)x}\,dx$$

であるので、

$$\hat{f}_n(t) = \frac{n}{it+1}\hat{f}_{n-1}(t)$$

上の関係式を連続して用いる。

$$\hat{f}_n(t) = \frac{n}{it+1}\frac{n-1}{it+1}\frac{n-2}{it+1}\cdots\frac{n-(n-1)}{it+1}\hat{f}_1(t)$$

よって（１）の結果を用いて、

$$\hat{f}_n(t) = \frac{n!}{(it+1)^n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(it+1)^2}$$

$$\therefore \hat{f}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{n!}{(it+1)^{n+1}}$$

2018（H30）年度【４】問題〈微分方程式〉

【４】$y_1 = y_1(x),\quad y_2 = y_2(x),\quad x \geq 0$ に関する微分方程式系

$$y_1' = y_1 + y_2,\quad y_2' = \frac{y_1}{x} + \frac{y_2}{x} \qquad (*)$$

を考える。

（１）$z = y_1 + y_2$ とおく。z の満たす１階常微分方程式を示し、その一般解を求めよ。

z' を求める。

$$z' = y_1' + y_2'$$

与式 $(*)$ を代入する。

$$z' = (y_1 + y_2) + \left(\frac{y_1}{x} + \frac{y_2}{x}\right) = (y_1 + y_2) + \frac{1}{x}(y_1 + y_2)$$

よって、$z = y_1 + y_2$ とおいているので、

$$z' = z + \frac{1}{x}z = \left(1 + \frac{1}{x}\right)z$$

したがって、z の満たす１階常微分方程式は

$$\frac{dz}{dx} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)z$$

変数分離を行って、積分する。

$$\frac{dz}{z} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx \quad \int \frac{dz}{z} = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx$$

$$\ln|z| = x + \ln x + C$$

$$\ln|z| = \ln|e^x \cdot x \cdot e^c|$$

$$\therefore z = C_1 x e^x \quad (C_1 = \pm e^c)$$

（２）微分方程式系 $(*)$ の一般解を求めよ。

与式 $(*)$ より、$z = y_1 + y_2$ とおくと、

$$y_1' = z = C_1 x e^x \quad \rightarrow \quad y_1 = C_1(x-1)e^x + C_2$$

また、

$$\begin{aligned} y_2 &= z - y_1 \\ &= C_1 x e^x - \{C_1(x-1)e^x + C_2\} = C_1 e^x - C_2 \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{cases} y_1 = C_1(x-1)e^x + C_2 \\ y_2 = C_1 e^x - C_2 \end{cases}$$

（３）次の微分方程式系の解を、初期条件 $y_1(1) = 1, y_2(1) = 0$ のもとで求めよ。

$$y_1{}' = y_1 + y_2, \quad y_2{}' = \frac{y_1}{x} + \frac{y_2}{x} - x^2$$

与式より、

$$y_1{}' + y_2{}' = (y_1 + y_2) + \left(\frac{y_1}{x} + \frac{y_2}{x} - x^2\right)$$

$z = y_1 + y_2$ とおくと、

$$z' = z + \frac{1}{x}z - x^2 = \left(1 + \frac{1}{x}\right)z - x^2$$

$$\frac{dz}{dx} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)z - x^2$$

この同次一階微分方程式は（１）で解いたものである。

よって、特殊解 $\alpha(x)$ を定数変化法を用いて求める。$\alpha(x) = C(x)xe^x$ として上式に代入する。

$$\frac{d}{dx}\{C(x)xe^x\} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)C(x)xe^x - x^2$$

左辺は積の微分を行う。

$$C'(x)xe^x + C(x)e^x + C(x)xe^x = \left(1 + \frac{1}{x}\right)C(x)xe^x - x^2$$

$$\therefore C'(x)xe^x = -x^2$$

$$\therefore C'(x) = -xe^{-x} \rightarrow \quad C(x) = (x+1)e^{-x} + C_3$$

$$\therefore \alpha(x) = \{(x+1)e^{-x} + C_3\}xe^x = (x+1)x + C_3xe^x$$

したがって、

$$\therefore z = C_1xe^x + (x+1)x + C_3xe^x$$

$$\therefore z = C_4xe^x + x^2 + x \quad (C_4 = C_1 + C_3)$$

与式 $(*)$ より、$z = y_1 + y_2$ とおくと、

$$y_1' = z = C_4 x e^x + x^2 + x \quad \rightarrow \quad y_1 = C_4(x-1)e^x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_5$$

また、

$$\begin{aligned} y_2 &= z - y_1 \\ &= (C_4 x e^x + x^2 + x) - \left\{C_4(x-1)e^x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_5\right\} \\ &= C_4 e^x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - C_5 \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{cases} y_1 = C_4(x-1)e^x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_5 \\ y_2 = C_4 e^x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - C_5 \end{cases}$$

初期条件 $y_1(1) = 1, y_2(1) = 0$ より、

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + C_5 = 1 \\ C_4 e^1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - C_5 = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} C_4 = -\frac{1}{e} \\ C_5 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

したがって、

$$\therefore \begin{cases} y_1 = -(x-1)e^{x-1} + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6} \\ y_2 = -e^{x-1} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{6} \end{cases}$$

2018（H30）年度 講評

【１】逆関数と極値に関する知識。行列の固有値・固有値ベクトルの求め方は慣れておく。

【２】留数定理は知っておく。ロピタルの定理で極限を求めよう。

【３】フーリエ変換。収束に関する知識は必須。

【４】連立微分方程式。誘導に乗ることが大事。定数変化法は慣れておく。