1. つぎの各問いに答えよ．

(1) 集合 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ x\le y\le 1\}$ に対して，2重積分 $\displaystyle\iint_D e^{\frac{1}{3}x^3-x}y\,dxdy$ の値を求めよ．

(2) α を0でない実数とする．行列 $A=\begin{pmatrix}0&\alpha&0\\0&0&\alpha\\\alpha&0&0\end{pmatrix}$ に対して，A^n の固有値を全て求めよ．ただし n は自然数とする．

2. x, y を実数とし，実数値関数 $u(x,y)=x^3-3xy^2+x$ を考える．

(1) コーシー・リーマンの関係式 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ および $v(0,0)=0$ を満たす実数値関数 $v(x,y)$ を求めよ．

(2) 複素変数 $z=x+iy$ の関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ を考える．$f(z)$ を z のみを用いて表わせ．

(3) 複素平面上の点 i を中心とし，半径 $\sqrt{2}$ の反時計方向に向き付けられた円周を C とする．複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{f(z)}\,dz$ の値を求めよ．

3. n を自然数とし，関数 $f_n(x)=\begin{cases}n, & |x|\le\frac{1}{n},\\ 0, & |x|>\frac{1}{n}\end{cases}$ を考える．

(1) $f_n(x)$ のフーリエ変換 $\hat{f}_n(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)e^{-itx}\,dx$, $-\infty<t<\infty$ を求めよ．

(2) 任意に固定された $t\neq 0$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\hat{f}_n(t)$ を求めよ．また，任意に固定された自然数 n に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\hat{f}_n(t)$ を求めよ．

(3) (1) の結果を利用して，定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin\frac{t}{n}}{t}\,dt$ の値を求めよ．

4. $\boldsymbol{y}(x)=\begin{pmatrix}y_1(x)\\y_2(x)\end{pmatrix}$, $x\ge 0$ に関する微分方程式系

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=A\boldsymbol{y}+e^x\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{0} \tag{$*$}$$

を考える．ここで $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ とし，$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^2$ は定ベクトルとする．

(1) 行列の指数関数 e^{xA} を求めよ．ここで $e^{xA}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}A^k$, $A^0=I$ (単位行列) とする．

(2) $\boldsymbol{z}(x)=e^{-x}\boldsymbol{y}(x)$ とおいて，$\boldsymbol{z}(x)$ に関する微分方程式系を導け．

(3) $(*)$ の解 $\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{y}(\pi)=e^{\pi}\boldsymbol{z}(\pi)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ を満たすように，定ベクトル $\boldsymbol{c}$ を決めよ．

2019（H31）年度【１】問題〈微分積分・線形代数〉

（１）集合 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ x\le y\le 1\}$ に対して、２重積分

$$\iint_D e^{\frac{1}{3}x^3-x}y\,dxdy$$

の値を求めよ。

$$\iint_D e^{\frac{1}{3}x^3-x}y\,dxdy=\int_0^1\left(\int_x^1 e^{\frac{1}{3}x^3-x}y\,dy\right)dx$$

y についての積分から行う。

$$\int_x^1 e^{\frac{1}{3}x^3-x}y\,dy=\left[e^{\frac{1}{3}x^3-x}\frac{1}{2}y^2\right]_x^1=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}x^3-x}(1-x^2)$$

$$\therefore \iint_D e^{\frac{1}{3}x^3-x}y\,dxdy=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{\frac{1}{3}x^3-x}(1-x^2)\,dx=\frac{1}{2}\left[-e^{\frac{1}{3}x^3-x}\right]_0^1=-\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{2}{3}}-1\right)$$

$$\therefore \iint_D e^{\frac{1}{3}x^2-x}y\,dxdy=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{3}}\right)$$

（２）α を 0 でない実数とする。

行列 $A=\begin{pmatrix}0&\alpha&0\\0&0&\alpha\\\alpha&0&0\end{pmatrix}$

に対して、A^n の固有値を全て求めよ。ただし n は自然数とする。

$$A=\begin{pmatrix}0&\alpha&0\\0&0&\alpha\\\alpha&0&0\end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix}0&0&\alpha^2\\\alpha^2&0&0\\0&\alpha^2&0\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}\alpha^3&0&0\\0&\alpha^3&0\\0&0&\alpha^3\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}0&\alpha^4&0\\0&0&\alpha^4\\\alpha^4&0&0\end{pmatrix},\quad A^5=\begin{pmatrix}0&0&\alpha^5\\\alpha^5&0&0\\0&\alpha^5&0\end{pmatrix},\quad A^6=\begin{pmatrix}\alpha^6&0&0\\0&\alpha^6&0\\0&0&\alpha^6\end{pmatrix}$$

$$A^n=\begin{cases}\begin{pmatrix}0&\alpha^n&0\\0&0&\alpha^n\\\alpha^n&0&0\end{pmatrix} & (n=3k-2)\\ \begin{pmatrix}0&0&\alpha^n\\\alpha^n&0&0\\0&\alpha^n&0\end{pmatrix} & (n=3k-1)\\ \begin{pmatrix}\alpha^n&0&0\\0&\alpha^n&0\\0&0&\alpha^n\end{pmatrix} & (n=3k)\end{cases}$$

(i) $n = 3k - 2$ のとき

固有方程式を解く。

$$|\lambda E - A^n| = \begin{vmatrix} \lambda & -\alpha^n & 0 \\ 0 & \lambda & -\alpha^n \\ -\alpha^n & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - \alpha^{3n}$$

$$= (\lambda - \alpha^n)(\lambda^2 + \alpha^n\lambda + \alpha^{2n}) = 0$$

$$\therefore \lambda = \alpha^n, \quad \lambda = \frac{-\alpha^n \pm \sqrt{\alpha^{2n} - 4\alpha^{2n}}}{2} = \frac{-\alpha^n \pm \sqrt{3}i\alpha^n}{2}$$

(ii) $n = 3k - 1$ のとき

固有方程式を解く。

$$|\lambda E - A^n| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\alpha^n \\ -\alpha^n & \lambda & 0 \\ 0 & -\alpha^n & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - \alpha^{3n}$$

$$= (\lambda - \alpha^n)(\lambda^2 + \alpha^n\lambda + \alpha^{2n}) = 0$$

$$\therefore \lambda = \alpha^n, \quad \lambda = \frac{-\alpha^n \pm \sqrt{3}i\alpha^n}{2}$$

(iii) $n = 3k$ のとき

固有方程式を解く。

$$|\lambda E - A^n| = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \alpha^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \alpha^n \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - \alpha^n)^3 = 0$$

$$\therefore \lambda = \alpha^n$$

2019（H31）年度【２】問題〈複素関数〉

【２】x, y を実数とし、実数値関数 $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + x$ を考える。

（１）コーシー・リーマンの関係式　$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

および $v(0,0) = 0$ を満たす実数値関数 $v(x,y)$ を求めよ。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3xy^2 + x) = 3x^2 - 3y^2 + 1$$

$$v(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int (3x^2 - 3y^2 + 1) dy = 3x^2 y - y^3 + y + C(x)$$

$$\therefore v(x,y) = 3x^2 y - y^3 + y + C(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 3xy^2 + x) = -6xy$$

$$v(x,y) = \int -\frac{\partial v}{\partial y} dx = \int 6xy\, dx = 3x^2 y + C'(y)$$

$$\therefore v(x,y) = 3x^2 y + C'(y)$$

$v(x,y)$ が１通りに書けることから、

$$\therefore v(x,y) = 3x^2 y - y^3 + y$$

（２）複素関数 $z = x + iy$ の関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ を考える。

$f(z)$ を z のみを用いて表わせ。

（１）より、

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x,y) + iv(x,y) \\ &= (x^3 - 3xy^2 + x) + i(3x^2 y - y^3 + y) \\ &= (x^3 + i3x^2 y - 3xy^2 - iy^3) + (x + iy) \\ &= (x + iy)^3 + (x + iy) \end{aligned}$$

よって、

$$\therefore f(z) = z^3 + z$$

（3）複素平面上の点 i を中心とし、半径 $\sqrt{2}$ の反時計方向に向き付けられた円周を C とする。

複素積分 $\int_C \frac{1}{f(z)}dz$ の値を求めよ。

$$\int_C \frac{1}{f(z)}dz = \int_C \frac{1}{z(z^2+1)}dz$$

$$= \int_C \frac{1}{z(z+i)(z-i)}dz$$

・留数定理

関数 $f(z)$ が正則で、ある領域内に描かれた単一閉曲線 C があり、

C の内部で $f(z)$ はその極 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 以外の点では正則であるとする。このとき、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \mathrm{Res}[f, a_1] + \mathrm{Res}[f, a_2] + \cdots + \mathrm{Res}[f, a_m]$$

・留数の求め方

点 a が関数 $f(z)$ の 1 位の極であれば、

$$\mathrm{Res}[f, a] = \lim_{z \to a}[(z-a)f(z)]$$

ここで、

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{f(z)}, 0\right] = \lim_{z \to 0}\left[\frac{1}{(z+i)(z-i)}\right] = 1$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{f(z)}, i\right] = \lim_{z \to i}\left[\frac{1}{z(z+i)}\right] = -\frac{1}{2}$$

留数定理より、単純閉曲線に含まれる孤立特異点のみに注目して、

$$\therefore \int_C \frac{1}{f(z)}dz = 2\pi i\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \pi i$$

2019（H31）年度【３】問題〈フーリエ解析〉

【３】n を自然数とし、

$$\text{関数 } f_n(x)=\begin{cases} n, & |x|\le 1/n, \\ 0, & |x|>1/n \end{cases} \quad \text{を考える。}$$

（１）$f_n(x)$ のフーリエ変換

$$\hat{f}_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)e^{-itx}\,dx, \quad -\infty<t<\infty \quad \text{を求めよ。}$$

$$\hat{f}_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n\cdot e^{-itx}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n\cdot e^{-itx}\,dx$$

（i）$t\neq 0$ のとき

$$\hat{f}_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{n}{-it}e^{-itx}\right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{n}{-it}\left(e^{-it\frac{1}{n}}-e^{it\frac{1}{n}}\right)$$

オイラーの公式を用いると、

$$\hat{f}_n(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{n}{t}\sin\frac{t}{n}$$

（ii）$t=0$ のとき

$$\hat{f}_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[nx]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)$$

$$\hat{f}_n(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

（２）任意に固定された $t \neq 0$ に対して、極限値 $\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(t)$ を求めよ。
また、任意に固定された自然数 n に対して、極限値 $\lim_{t\to 0} \hat{f}_n(t)$ を求めよ。

（１）より、$t \neq 0$ のとき

$$\hat{f}_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n}{t} \sin\frac{t}{n}$$

極限値 $\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(t)$ は、

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{t}{n}}{\frac{t}{n}}$$

ここで、$\frac{t}{n} = a$ とすると、極限値は次式に書き換えられる。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(t) &= \lim_{a\to 0} \hat{f}_n(t) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{a\to 0} \frac{\sin a}{a}\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

極限値 $\lim_{t\to 0} \hat{f}_n(t)$ は、

$$\lim_{t\to 0} \hat{f}_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{t\to 0} \frac{\sin\frac{t}{n}}{\frac{t}{n}}$$

ここで、$\frac{t}{n} = b$ とすると、極限値は次式に書き換えられる。

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \hat{f}_n(t) &= \lim_{b\to 0} \hat{f}_n(t) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{b\to 0} \frac{\sin b}{b}\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{t\to 0} \hat{f}_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

（3）（1）の結果を利用して、

定積分 $\int_0^\infty \frac{\sin\frac{t}{n}}{t}dt$ の値を求めよ。

フーリエ逆変換を行う。

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{f_n}(t)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f_n}(t)e^{itx}\,dt$$

（1）より、$t\neq 0$ のとき

$$\hat{f}_n(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{n}{t}\sin\frac{t}{n}$$

よって、

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{f_n}(t)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{n}{t}\sin\frac{t}{n}\right)e^{itx}\,dt$$

【蛇足】オイラーの公式を用いると、

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{f_n}(t)\right]=\frac{n}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\sin\frac{t}{n}\right)(\cos tx+i\sin tx)\,dt$$

$$=\frac{n}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\sin\frac{t}{n}\cos tx+i\frac{1}{t}\sin\frac{t}{n}\sin tx\right)dt$$

$$=\frac{2n}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{t}\sin\frac{t}{n}\cos tx\,dt$$

ここで、**偶**・**奇関数の積分の性質**を用いている。

$x=0$ のとき、フーリエ逆変換は次式となる。

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{f_n}(t)\right]=\frac{2n}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\frac{t}{n}}{t}dt$$

問題文から、$x=0$ のとき、値が n となることから、

$$\frac{2n}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\frac{t}{n}}{t}dt=n$$

$$\therefore\int_0^\infty\frac{\sin\frac{t}{n}}{t}dt=\frac{\pi}{2}$$

2019（H31）年度【４】問題〈微分方程式〉

【４】

$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$，　$x \geq 0$ に関する微分方程式系

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A\boldsymbol{y} + e^x \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

を考える。ここで

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とし、} \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2 \text{ は定ベクトルとする。}$$

（１）行列の指数関数 e^{xA} を求めよ。ここで

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k \ , \quad A^0 = I\left(\text{単位行列}\right) \text{とする。}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

の特性方程式は、次式となる。

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{vmatrix} = s^2 + 1 = (s+i)(s-i) = 0$$

よって、固有値は、

$$s = \pm i$$

固有ベクトルは、$(sI - A)v = 0$ より、

$$\begin{bmatrix} \pm i & -1 \\ 1 & \pm i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

より、$v_2 = \pm i v_1$ なので、

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

以上より、変換行列 P を用いて対角化を行う。

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \frac{1}{-2i} \begin{bmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

したがって、

$$e^{xA} = Pe^{x\Lambda}P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{ix} & 0 \\ 0 & e^{-ix} \end{bmatrix} \frac{1}{-2i} \begin{bmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{ix} & e^{-ix} \\ ie^{ix} & -ie^{-ix} \end{bmatrix} \frac{1}{-2i} \begin{bmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{i}{2} \begin{bmatrix} -ie^{ix} - ie^{-ix} & -e^{ix} + e^{-ix} \\ e^{ix} - e^{-ix} & -ie^{ix} - ie^{-ix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} & \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \dfrac{-e^{ix} + e^{-ix}}{2i} & \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \end{bmatrix}$$

オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いると、

$$e^{xA} = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

（２）$\boldsymbol{z}(x) = e^{-x}\boldsymbol{y}(x)$ とおいて、$\boldsymbol{z}(x)$ に関する微分方程式系を導け。

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A\boldsymbol{y} + e^{x}\boldsymbol{c}$$

$\boldsymbol{y}(x) = e^{x}\boldsymbol{z}(x)$ を方程式に代入すると、

$$\frac{d\left(e^{x}\boldsymbol{z}(x)\right)}{dx} = Ae^{x}\boldsymbol{z}(x) + e^{x}\boldsymbol{c}$$

積の微分公式より、

$$e^{x}\boldsymbol{z}(x) + e^{x}\frac{d\boldsymbol{z}(x)}{dx} = Ae^{x}\boldsymbol{z}(x) + e^{x}\boldsymbol{c}$$

両辺を e^{x} で除し、整理する。

$$\frac{d\boldsymbol{z}(x)}{dx} - A\boldsymbol{z}(x) + \boldsymbol{z}(x) = \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{0}$$

（３）$(*)$ の解 $\boldsymbol{y}$ が

$$\boldsymbol{y}(\pi) = e^{\pi}\boldsymbol{z}(\pi) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$ を満たすように、定ベクトル $\mathbf{c}$ を決めよ。

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + e^{x}\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

・同次方程式の場合

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

同次方程式の初期値 $\boldsymbol{y}_*(0)$ が与えられている場合、この微分方程式の解は次式となる。

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{y}_*(0)$$

次に、非同次方程式の特殊解 $\boldsymbol{\alpha}(x)$ を、未定係数法を用いて求めていく。

$$\boldsymbol{\alpha}(x) = e^{x}\boldsymbol{a}$$

として、方程式 $(*)$ に代入する。

$$e^{x}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A}e^{x}\boldsymbol{a} + e^{x}\boldsymbol{c} \quad \therefore \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{a}$$

$$\therefore \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{c} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{c}$$

よって、特殊解 $\boldsymbol{\alpha}(x)$ は次式となる。

$$\boldsymbol{\alpha}(x) = \frac{e^{x}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{c}$$

方程式 $(*)$ の一般解は、同次方程式の一般解と非同次方程式の特殊解の和となるので、

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{y}_*(0) + \frac{e^{x}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{c}$$

$\boldsymbol{y}_*(0) = \boldsymbol{b}, \quad x = \pi, \quad \boldsymbol{y}(\pi) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ を上式に代入し、（１）の結果も用いて、$\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{c}$ で表す。

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = e^{\boldsymbol{A}\pi}\boldsymbol{b} + \frac{e^{\pi}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix}\cos\pi & \sin\pi\\-\sin\pi & \cos\pi\end{bmatrix}\boldsymbol{b} + \frac{e^{\pi}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{c}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \frac{e^{\pi}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{c} \quad \therefore \boldsymbol{b} = -\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{e^{\pi}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{c}$$

よって、方程式 (∗) の一般解は、$\boldsymbol{c}$ で表した $\boldsymbol{b}$ を用いて、

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{\boldsymbol{A}x}\left\{-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{e^{\pi}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{c}\right\} + \frac{e^{x}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{c}$$

初期条件は、$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{0}$ より、代入して $\boldsymbol{c}$ について解く。

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\cos 0 & \sin 0\\-\sin 0 & \cos 0\end{bmatrix}\left\{-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{e^{\pi}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{c}\right\} + \frac{e^{0}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{c}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \boldsymbol{I}\left\{-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{e^{\pi}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{c}\right\} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{c}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left\{e^{\pi}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\right\}\boldsymbol{c} \quad \therefore \begin{pmatrix}e^{\pi}+1 & e^{\pi}+1\\-e^{\pi}-1 & e^{\pi}+1\end{pmatrix}\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

$$\therefore (e^{\pi}+1)\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{c} = \frac{1}{e^{\pi}+1}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{e^{\pi}+1}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{e^{\pi}+1}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{c} = \frac{1}{e^{\pi}+1}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

2019（H31）年度 講評

【１】行列の固有値、n 乗の帰納的な求め方は慣れておく。

【２】留数定理は知っておく。

【３】フーリエ変換後、極限、定積分への応用の流れ。

【４】行列指数関数の求め方は、制御工学 II の講義資料を参考にされたい。

（３）では未定係数法を用いた。