1. つぎの各問いに答えよ.

(1) n を自然数とし, 関数 $f_n(x,y) = (a_n + b_n e^{-n^2 x}) \cos ny$ を考える.

(1-a) $f_n(x,y)$ が $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}(x,y) + \sqrt{n}\cos ny$, $x > 0, 0 < y < \pi$ および $f_n(0,y) = 0$, $0 < y < \pi$ を満たすように係数 a_n, b_n を定めよ.

(1-b) $D = \{(x,y) : x > 0, 0 \leq y \leq \pi\}$ とし, (1-a) の a_n, b_n をもつ関数 $f_n(x,y)$ を考える. 任意に固定された $(x,y) \in D$ に対して, 極限値 $\lim_{n\to\infty} f_n(x,y)$ を求めよ.

(2) a, b を相異なる実数とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$ を考える.

(2-a) A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2-b) 自然数 n に対して, A^n を求めよ.

2. $f(z) = 2z^3 - 5z^2 + 6z - 2$ とし, $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ とおく.

(1) $f(1+i) = 0$ であることを確認して, $f(z) = 0$ の根をすべて求めよ.

(2) $g(z)$ の各極における留数をそれぞれ求めよ.

(3) 原点を中心として反時計方向に向き付けられた半径 1 の円を C とする. このとき, 複素積分 $\displaystyle\int_C g(z)\,dz$ の値を求めよ.

3. $D = \{(x,y) : x > 0, y > 1\}$ 上の関数 $F(x,y) = 2xy^2 \log y$, $G(x,y) = x^2 y$ を考える.

(1) D において

$$\frac{\partial}{\partial x}\{\lambda(y)G(x,y)\} = \frac{\partial}{\partial y}\{\lambda(y)F(x,y)\}$$

を満たす恒等的には 0 でない関数 $\lambda(y)$, $y > 1$ を 1 つ求めよ.

(2) つぎの全微分方程式を考える.

$$F(x,y)dx + G(x,y)dy = 0 \qquad (*)$$

(1) の結果を用いて, D において点 $(1,e)$ を通る $(*)$ の解を求めよ.

(裏面へ続く)

2020（R2）年度【１】問題〈微分積分・線形代数〉

（１）n を自然数とし、関数 $f_n(x,y)=\left(a_n+b_ne^{-n^2x}\right)\cos ny$ を考える。

（1－a）$f_n(x,y)$ が

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}(x,y)+\sqrt{n}\cos ny,\quad x>0,0<y<\pi$$

および $f_n(0,y)=0,\ 0<y<\pi$ を満たすように係数 a_n,b_n を定めよ。

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(a_n+b_ne^{-n^2x}\right)\cos ny\right\}=-n^2b_ne^{-n^2x}\cos ny$$

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{\left(a_n+b_ne^{-n^2x}\right)\cos ny\right\}=-n^2\left(a_n+b_ne^{-n^2x}\right)\cos ny$$

よって、与式は次式となる。

$$-n^2b_ne^{-n^2x}\cos ny=-n^2\left(a_n+b_ne^{-n^2x}\right)\cos ny+\sqrt{n}\cos ny$$

$$n^2a_n\cos ny=\sqrt{n}\cos ny$$

$$\therefore a_n=\frac{\sqrt{n}}{n^2}$$

また、

$$f_n(0,y)=(a_n+b_ne^0)\cos ny=0$$

ここで、$\cos ny\neq 0$ として、

$$b_n=-a_n$$

$$\therefore b_n=-\frac{\sqrt{n}}{n^2}$$

（1－b）$D=\{(x,y):x>0,\ 0\le y\le\pi\}$ とし、（1－a）の a_n,b_n をもつ関数 $f_n(x,y)$ を考える。
任意に固定された $(x,y)\in D$ に対して、極限値 $\lim_{n\to\infty}f_n(x,y)$ を求めよ。

（1－a）より、

$$f_n(x,y)=\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2}-\frac{\sqrt{n}}{n^2}e^{-n^2x}\right)\cos ny=\frac{\sqrt{n}}{n^2}\left(1-e^{-n^2x}\right)\cos ny$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}f_n(x,y)=0$$

（２）a, b を相異なる実数とし、

行列 $A = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$ を考える。

（2－a）A の固有値および固有ベクトルを求めよ。

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a+b-\lambda & a-b \\ a-b & a+b-\lambda \end{vmatrix} = (a+b-\lambda)^2 - (a-b)^2$$

$$= \{(a+b-\lambda)+(a-b)\}\{(a+b-\lambda)-(a-b)\}$$

$$= (2a-\lambda)(2b-\lambda)$$

固有方程式 $|A - \lambda E| = (2a-\lambda)(2b-\lambda) = 0$ を解くと、固有値は以下の２つの値となる。

$$\therefore \lambda = 2a, \quad 2b$$

（i）$\lambda = 2a$ のとき

$$\begin{pmatrix} -a+b & a-b \\ a-b & -a+b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-a+b)x + (a-b)y = 0 \\ (a-b)x + (-a+b)y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = x$$

s_1 を任意定数として、

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

（ii）$\lambda = 2b$ のとき

$$\begin{pmatrix} a-b & a-b \\ a-b & a-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)x + (a-b)y = 0 \\ (a-b)x + (a-b)y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = -x$$

s_2 を任意定数として、

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

（2－b）自然数 n に対して、A^n を求めよ。

（2－a）より、

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

として A を対角化する。

P の逆行列 P^{-1} を求める。

$$P^{-1}=\frac{1}{|P|}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{-1-1}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a+b & a-b\\ a-b & a+b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a & a\\ b & -b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2a & 0\\ 0 & 2b\end{pmatrix}$$

$$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2a & 0\\ 0 & 2b\end{pmatrix}$$

よって、$P^{-1}AP=D$ とすると、

$$A^n=PD^nP^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n a^n & 0\\ 0 & 2^n b^n\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=2^n\begin{pmatrix}a^n & b^n\\ a^n & -b^n\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=2^{n-1}\begin{pmatrix}a^n & b^n\\ a^n & -b^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^n=2^{n-1}\begin{pmatrix}a^n+b^n & a^n-b^n\\ a^n-b^n & a^n+b^n\end{pmatrix}$$

2020（R2）年度【２】問題〈複素関数〉

【２】$f(z)=2z^3-5z^2+6z-2$ とし、

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}$$

とおく。

（１）$f(1+i)=0$ であることを確認して、$f(z)=0$ の根をすべて求めよ。

$$\begin{aligned} f(z) &= 2z^3-5z^2+6z-2 \\ &= z^2(2z-5)+6z-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1+i) &= (1+i)^2(2+2i-5)+6(1+i)-2 \\ &= 2i(2i-3)+4+6i \\ &= -4-6i+4+6i \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f(1+i)=0$$

複素共役根を持つことを考えて、$f(z)$ を因数分解する。

$$f(z)=2z^3-5z^2+6z-2=(2z-1)\{z-(1+i)\}\{z-(1-i)\}$$

よって、$f(z)=0$ の根は、

$$\therefore z=\frac{1}{2},\quad 1\pm i$$

（２）$g(z)$ の各極における留数をそれぞれ求めよ。

・留数の求め方

点 a が関数 $f(z)$ の１位の極であれば、

$$\mathrm{Res}[f,a]=\lim_{z\to a}[(z-a)f(z)]$$

$$g(z) = \frac{1}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)\{z-(1+i)\}\{z-(1-i)\}}$$

・$z = 1/2$ における留数

$$\mathrm{Res}\left[g, \frac{1}{2}\right] = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2\{z-(1+i)\}\{z-(1-i)\}}\right]$$

$$= \frac{1}{2\left\{\frac{1}{2}-(1+i)\right\}\left\{\frac{1}{2}-(1-i)\right\}}$$

$$= \frac{1}{2\left(-\frac{1}{2}-i\right)\left(-\frac{1}{2}+i\right)} = \frac{1}{2\left(\frac{1}{4}+1\right)}$$

$$\therefore \mathrm{Res}\left[g, \frac{1}{2}\right] = \frac{2}{5}$$

・$z = 1 + i$ における留数

$$\mathrm{Res}[g, 1+i] = \lim_{z\to 1+i}\left[\frac{1}{(2z-1)\{z-(1-i)\}}\right]$$

$$= \frac{1}{(1+2i)(2i)} = \frac{1}{2(-2+i)}$$

$$\therefore \mathrm{Res}[g, 1+i] = \frac{-2-i}{10}$$

・$z = 1 - i$ における留数

$$\mathrm{Res}[g, 1-i] = \lim_{z\to 1-i}\left[\frac{1}{(2z-1)\{z-(1+i)\}}\right]$$

$$= \frac{1}{(1-2i)(-2i)} = \frac{1}{2(-2-i)}$$

$$\therefore \mathrm{Res}[g, 1+i] = \frac{-2+i}{10}$$

（3）原点を中心として反時計方向に向き付けられた半径1の円を C とする。このとき、複素積分

$$\int_C g(z)dz$$

の値を求めよ。

・留数定理

関数 $f(z)$ が正則で、ある領域内に描かれた単一閉曲線 C があり、C の内部で $f(z)$ はその極 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 以外の点では正則であるとする。このとき、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \mathrm{Res}[f, a_1] + \mathrm{Res}[f, a_2] + \cdots + \mathrm{Res}[f, a_m]$$

（2）の結果を用いて留数定理より、単純閉曲線に含まれる孤立特異点のみに注目して、

$$\therefore \int_C g(z)dz = 2\pi i \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}\pi i$$

2020（R3）年度【３】問題〈微分方程式〉

【３】$D=\{(x,y):x>0,\ y>1\}$ 上の関数 $F(x,y)=2xy^2\log y$, $G(x,y)=x^2y$ を考える。

（１）D において、

$$\frac{\partial}{\partial x}\{\lambda(y)G(x,y)\}=\frac{\partial}{\partial y}\{\lambda(y)F(x,y)\}$$

を満たす恒等的には 0 でない $\lambda(y), y>1$ を 1 つ求めよ。

積分因子 $\lambda(y)$ を求める。

$$\frac{\partial}{\partial x}\{\lambda(y)G(x,y)\}=\lambda(y)\cdot\frac{\partial G(x,y)}{\partial x}=\lambda(y)\cdot 2xy$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\{\lambda(y)F(x,y)\}=\frac{\partial}{\partial y}\lambda(y)\cdot F(x,y)+\lambda(y)\cdot\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\lambda(y)\cdot 2xy^2\log y+\lambda(y)\cdot(4xy\log y+2xy)$$

よって、

$$\frac{\partial}{\partial y}\lambda(y)\cdot 2xy^2\log y+\lambda(y)\cdot 4xy\log y=0$$

$$\therefore y\frac{d\lambda(y)}{dy}+2\lambda(y)=0$$

変数分離して解く。

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=-2\frac{dy}{y}$$

$$\therefore \log\lambda=-2\log y+C$$

ここで、積分定数を 0 とすると、

$$\therefore \lambda(y)=\frac{1}{y^2}$$

（２）つぎの全微分方程式を考える。

$$F(x,y)dx + G(x,y)dy = 0 \qquad (*)$$

（１）の結果を用いて、D において $(1,e)$ を通る$(*)$ の解を求めよ。

$\lambda(y)$ を全微分方程式 $(*)$ の両辺にかける。

$$2x\log y\,dx + \frac{x^2}{y}dy = 0$$

この形は完全形ゆえ、次の積分計算を行う。

$$I = \int 2x\log y\,dx = x^2\log y$$

$$J = \int \frac{x^2}{y}dy = x^2\log y$$

よって、一般解は、

$$x^2\log y = C$$

$(1,e)$ を通るので、

$$C = 1$$

したがって、求める特殊解は、

$$\log y = \frac{1}{x^2}$$

$$\therefore y = e^{x^{-2}}$$

4. $0 < p < \pi$ とし，関数 $f(x) = \begin{cases} 1, & -p \le x \le p, \\ 0, & -\pi \le x < -p,\ p < x \le \pi \end{cases}$ を考える．

(1) 関数 $f(x)$ を周期 2π の関数に拡張した関数を，記号を変えずに $f(x)$ で表わす．$f(x)$ を以下のようにフーリエ級数展開するとき，各係数 a_0, a_n, b_n の値を計算せよ．

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

(2) (1)の結果とパーセバルの等式を利用して，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 np}{n^2}$ および $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$ の値をそれぞれ求めよ．

2020（R2）年度【4】問題〈フーリエ解析〉

【4】$0 < p < \pi$ とし、

$$\text{関数 } f(x) = \begin{cases} 1, & -p \le x \le p, \\ 0, & -\pi \le x \le -p,\ p \le x \le \pi \end{cases} \quad \text{を考える。}$$

（1）関数 $f(x)$ を周期 2π の関数に拡張した関数を、記号を変えずに $f(x)$ で表わす。

$f(x)$ を以下のようにフーリエ級数展開するとき、各係数 a_0, a_n, b_n の値を計算せよ。

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-p} 0\ dx + \int_{-p}^{p} 1\ dx + \int_{p}^{\pi} 0\ dx\right\} = \frac{2p}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-p} 0\ dx + \int_{-p}^{p} \cos nx\ dx + \int_{p}^{\pi} 0\ dx\right\} = \frac{2\sin np}{n\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-p} 0\ dx + \int_{-p}^{p} \sin nx\ dx + \int_{p}^{\pi} 0\ dx\right\} = 0$$

よって、各係数 a_0, a_n, b_n の値は、

$$a_0 = \frac{2p}{\pi}, \quad a_n = \frac{2\sin np}{n\pi}, \quad b_n = 0$$

（2）（1）の結果とパーセバルの等式を利用して、

$$\text{級数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 np}{n^2} \text{ および } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \text{ の値をそれぞれ求めよ。}$$

・パーセバルの等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

（1）の結果とパーセバルの等式より、

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-p}^{p} 1\ dx = \frac{2p}{\pi}$$

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{2p^2}{\pi^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\sin^2 np}{n^2\pi^2}\right)$$

よって、

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 np}{n^2}=\frac{2p}{\pi}-\frac{2p^2}{\pi^2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 np}{n^2}=\frac{\pi p}{2}-\frac{p^2}{2}$$

また、$p=\frac{\pi}{2}$ とすると、

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=1,\quad \frac{a_0^2}{2}=\frac{1}{2}$$

ここで、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\sin^2 n\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2}\right)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

であることを考慮すると（これを見越して $p=\pi/2$ としている）

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=1-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

2020（R2）年度 講評

【１】行列の固有値、n 乗の求め方は慣れておく。

【２】留数定理は知っておく。

【３】全微分方程式。積分因子を求め、完全微分方程式にして解く。

【４】フーリエ係数の求め方、パーセバルの等式の扱い方は知っておく。