1. つぎの各問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ を考える.

(1-a) 2以上の自然数 n に対し，次の等式が成り立つことを示せ.

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2nxf^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0$$

(1-b) 任意の自然数 n に対し，$f^{(n)}(0)$ を求めよ.

(2) ある自然数 m について $A^m = O$ を満たす正方行列 A を冪零行列という．ただし O は零行列である.

(2-a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は冪零行列であることを示せ.

(2-b) 任意の冪零行列の固有値は 0 のみであることを示せ.

2. 複素関数 $f(z) = \dfrac{e^{-2z}}{(z-1)^2}$ を考える．$R > 1$ とする．複素平面上の $-Ri$ を始点とし，原点を中心とする半径 R の円周を反時計方向に進んで終点 Ri に至る半円弧を C_1 とする．また始点 Ri から終点 $-Ri$ に至る線分を C_2 とする．単純閉曲線 C を $C = C_1 \cup C_2$ とおく.

(1) 複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$ の値を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} f(z)dz = 0$ となることを示せ.

(3) (1) と (2) の結果を用いて積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{2t\sin 2t - (t^2-1)\cos 2t}{(t^2+1)^2}\,dt$ の値を求めよ.

3. $y = y(x)$, $x \geq 0$ に関するつぎの非同次微分方程式

$$y'' + 4y' + 3y = xe^{-2x} \qquad (*)$$

を考える.

(1) 同次微分方程式 $y'' + 4y' + 3y = 0$ の一般解を求めよ.

(2) $(*)$ の一般解を求めよ.

(3) 初期条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ のもとで $(*)$ の解 $y(x)$ を求め，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^x y(x)$ が存在する場合にはその値を求めよ.

（裏面へ続く）

2021（R3）年度【１】問題〈微分積分・線形代数〉

（１）関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ を考える。

（1－a）2 以上の自然数 n に対し、次の等式が成り立つことを示せ。

$$(1+x^2)f^{(n)}(x)+2nxf^{(n-1)}(x)+n(n-1)f^{(n-2)}(x)=0$$

（i）$n=2$ のとき

$$f^{1}(x)=-(1+x^2)^{-2}\cdot 2x$$

$$f^{2}(x)=2(1+x^2)^{-3}\cdot 4x^2-2(1+x^2)^{-2}$$

左辺に代入して計算すると、

$$(1+x^2)\{(1+x^2)^{-3}\cdot 8x^2-2(1+x^2)^{-2}\}-4x(1+x^2)^{-2}\cdot 2x+2(1+x^2)^{-1}=0$$

となり、等式は満たされる。

（ii）$n=k$ のとき成り立つと仮定して、$n=k+1$ のときを確認する。

・ $n=k$ のとき

$$(1+x^2)f^{(k)}(x)+2kxf^{(k-1)}(x)+k(k-1)f^{(k-2)}(x)=0$$

上式の両辺を微分すると、

$$2xf^{(k)}(x)+(1+x^2)f^{(k+1)}(x)+2kf^{(k-1)}(x)+2kxf^{(k)}(x)+k(k-1)f^{(k-1)}(x)=0$$

整理して、

$$(1+x^2)f^{(k+1)}(x)+2(k+1)xf^{(k)}(x)+k(k-1)f^{(k-1)}(x)=0$$

となり、$n=k+1$ のときも成り立つ。

よって、（i）（ii）より、数学的帰納法から証明された。

（1－b）任意の自然数 n に対し、$f^{(n)}(0)$ を求めよ。

$x=0$ を代入すると、

$$f^{(n)}(0)+n(n-1)f^{(n-2)}(0)=0$$

$$\therefore f^{(n)}(0)=-n(n-1)f^{(n-2)}(0) \qquad (*)$$

（i）n が偶数のとき

$(*)$ の関係を繰り返し用いる。

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \{-n(n-1)\}\cdot\{-(n-2)(n-3)\}\cdots\{-2\cdot 1\}f(0) \\ &= (-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 2\cdot 1\}f(0) \\ &= (-1)^{\frac{n}{2}}\cdot n!\cdot f(0) \end{aligned}$$

$f(0)=1$ より、

$$\therefore f^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot n!$$

（ii）n が奇数のとき

$(*)$ の関係を繰り返し用いる。

$$f^{(n)}(0)=\{-n(n-1)\}\cdot\{-(n-2)(n-3)\}\cdots\{-3\cdot 2\}f'(0)$$

$f'(0)=0$ より、

$$\therefore f^{(n)}(0)=0$$

（i）（ii）より、

$$\therefore f^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot n! & (\text{n が偶数}) \\ 0 & (\text{n が奇数})\end{cases}$$

（２）ある自然数 m について $A^m = O$ を満たす正方行列 A を冪零（べき零）行列という。
ただし O は零行列である。

（2－a） $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は冪零行列であることを示せ。

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

自然数 $m = 3$ について $A^m = O$ を満たすため、正方行列 A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ は冪零行列である。

（2－b）任意の冪零行列の固有値は 0 のみであることを示せ。

A の固有値を λ とすると、$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ として、

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

とする。ここで、自然数 $k = 3$ に対して、

$$A^k\boldsymbol{x} = \lambda^k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

よって、

$$\therefore \lambda = 0$$

すなわち、A の固有値は 0 のみである。

2021（R3）年度【２】問題〈複素関数〉

【２】

$$f(z)=\frac{e^{-2z}}{(z-1)^2}$$

を考える。$R>1$ とする。複素平面上の $-Ri$ を始点とし、原点を中心とする半径 R の円周を反時計方向に進んで終点 Ri に至る半円弧を C_1 とする。

また始点 Ri から終点 $-Ri$ に至る線分を C_2 とする。

単純閉曲線を C を $C=C_1\cup C_2$ とおく。

（１）複素積分　$\int_C f(z)dz$　の値を求めよ。

・留数定理

関数 $f(z)$ が正則で、ある領域内に描かれた単一閉曲線 C があり、

C の内部で $f(z)$ はその極 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 以外の点では正則であるとする。このとき、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz=\mathrm{Res}[f,a_1]+\mathrm{Res}[f,a_2]+\cdots+\mathrm{Res}[f,a_m]$$

・留数の求め方

点 a が関数 $f(z)$ の１位の極であれば、

$$\mathrm{Res}[f,a]=\lim_{z\to a}[(z-a)f(z)]$$

点 a が関数 $f(z)$ の２位の極であれば、

$$\mathrm{Res}[f,a]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to a}\left[\frac{d}{dz}(z-a)^2f(z)\right]$$

ここで、

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\left[\frac{d}{dz}(z-1)^2\frac{e^{-2z}}{(z-1)^2}\right]=\lim_{z\to 1}[-2e^{-2z}]=\frac{-2}{e^2}$$

よって、留数定理より、

$$\therefore\int_C f(z)dz=2\pi i\cdot\left(\frac{-2}{e^2}\right)=\frac{-4\pi i}{e^2}$$

（2） $\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} f(z)dz = 0$　となることを示せ。

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_1} \frac{e^{-2z}}{(z-1)^2}dz$$

$z = x + iy$,　$|z| = R$,　$|dz| = \pi R$,　$|z-1| \geq |z| - 1$ を利用すると、

$$\left|\int_{C_1} f(z)dz\right| \leq \int_{C_1} \frac{|e^{-2z}|}{|z-1|^2}|dz|$$

$$\leq \int_{C_1} \frac{|e^{-2x}|\left|e^{-i\cdot 2y}\right|}{(|z|-1)^2}|dz|$$

$$= \frac{1\cdot 1}{(R-1)^2}\pi R \quad (\because x \geq 0)$$

よって、

$$0 \leq \left|\int_{C_1} \frac{e^{-2z}}{(z-1)^2}dz\right| \leq \int_{C_1} \frac{|e^{-2z}|}{|z-1|^2}|dz|$$

したがって、はさみうちの定理より、

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_1} \frac{e^{-2z}}{(z-1)^2}dz\right| = 0$$

$$\therefore \lim_{R\to\infty}\int_{C_1} f(z)dz = 0$$

（3）（1）と（2）の結果を用いて

積分 $I = \int_0^\infty \frac{2t\sin 2t - (t^2-1)\cos 2t}{(t^2+1)^2}dt$ の値を求めよ。

始点 Ri から終点 $-Ri$ に至る線分を C_2 としているので、

$z = it$ とおくことは思いつける。$\because z = it\ (-R \leq t \leq R)$

$z = it$ とおくと、$dz = idt$

$$\int f(z)dz = \int \frac{e^{-2it}}{(it-1)^2} idt$$

$$= \int \frac{ie^{-2it}(it+1)^2}{(it-1)^2(it+1)^2} dt$$

$$= \int \frac{e^{-2it}(-it^2-2t+i)}{(t^2+1)^2} dt$$

ここで、オイラーの公式を用いて、実部と虚部に変形する。

$$\int f(z)dz = \int \frac{(\cos 2t - i\sin 2t)(-it^2-2t+i)}{(t^2+1)^2} dt$$

$$= \int \frac{-2t\cos 2t - (t^2-1)\sin 2t}{(t^2+1)^2} dt + i\int \frac{-(t^2-1)\cos 2t + 2t\sin 2t}{(t^2+1)^2} dt$$

求めたい形が現れた。

（1）（2）の結果より、$R \to \infty$ のとき、

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = \int_{\infty}^{-\infty} f(z)dz$$

よって、

$$\frac{-4\pi i}{e^2} = \int_{\infty}^{-\infty} \frac{-2t\cos 2t - (t^2-1)\sin 2t}{(t^2+1)^2} dt + i\int_{\infty}^{-\infty} \frac{-(t^2-1)\cos 2t + 2t\sin 2t}{(t^2+1)^2} dt$$

虚部を比較して、

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(t^2-1)\cos 2t + 2t\sin 2t}{(t^2+1)^2} dt = -\left(\frac{-4\pi}{e^2}\right)$$

求めたい形は偶関数なので、

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{-(t^2-1)\cos 2t + 2t\sin 2t}{(t^2+1)^2} dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(t^2-1)\cos 2t + 2t\sin 2t}{(t^2+1)^2} dt$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{-(t^2-1)\cos 2t + 2t\sin 2t}{(t^2+1)^2} dt = \frac{2\pi}{e^2}$$

しんど。

2021（R3）年度【３】問題〈微分方程式〉

【３】$y=y(x), x \geq 0$ に関するつぎの非同次微分方程式

$$y'' + 4y' + 3y = xe^{-2x} \qquad (*)$$

を考える。

（１）同次微分方程式 $y'' + 4y' + 3y = 0$ の一般解を求めよ。

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0$$

を解くと、

$$\lambda = -1, -3$$

よって、任意定数 C_1, C_2 を用いて、同次微分方程式の一般解 $u(x)$ は以下となる。

$$\therefore u(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$$

（２）$(*)$ の一般解を求めよ。

非同次微分方程式の特殊解 $\alpha(x)$ を定数変化法を用いて求める。

（※ $\alpha(x) = e^{-2x}(Ax + B)$ とおいて、未定係数法を用いて解く方法が賢明。）

ロンスキアン W は次式となる。

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-3x} \\ -e^{-x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -2e^{-4x}$$

よって、特殊解 $\alpha(x)$ は以下となる。

$$\alpha(x) = -e^{-x} \int \frac{xe^{-2x} \cdot e^{-3x}}{-2e^{-4x}} dx + e^{-3x} \int \frac{xe^{-2x} \cdot e^{-x}}{-2e^{-4x}} dx$$

$$= \frac{e^{-x}}{2} \int xe^{-x}\, dx - \frac{e^{-3x}}{2} \int xe^{x}\, dx$$

部分積分を行うと、

$$\frac{e^{-x}}{2}(-xe^{-x} + e^{-x}) - \frac{e^{-3x}}{2}(xe^{x} - e^{x}) = \frac{1}{2}(-xe^{-2x} + e^{-2x}) - \frac{1}{2}(xe^{-2x} - e^{-2x})$$

$$\therefore \alpha(x) = -xe^{-2x}$$

したがって、$(*)$ の一般解 $y(x)$は（１）の結果より、$y(x) = u(x) + \alpha(x)$ なので、

$$\therefore y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} - xe^{-2x}$$

（３）初期条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ のもとで $(*)$ の解 $y(x)$ を求め、
$\lim_{x\to\infty} e^x y(x)$ が存在する場合にはその値を求めよ。

（２）の結果より、

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{-3x} - 2xe^{-2x} - e^{-2x}$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$y'(0) = -C_1 - 3C_2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 - 3C_2 = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

よって、解 $y(x)$ は、

$$\therefore y(x) = 2e^{-x} - e^{-3x} - xe^{-2x}$$

このとき、

$$\therefore \lim_{x\to\infty} e^x\{2e^{-x} - e^{-3x} - xe^{-2x}\} = 2$$

4. n を自然数とし，関数 $f(x) = \begin{cases} n(1-n|x|), & |x| \le 1/n, \\ 0, & |x| > 1/n \end{cases}$ を考える．

(1) 関数 $f(x)$ を周期 2π の関数に拡張した関数を，記号を変えずに $f(x)$ で表わす．$f(x)$ を以下のようにフーリエ級数展開するとき，各係数 a_0, a_k, b_k の値を計算せよ．

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

(2) (1) で得た係数 a_k を $a_k(n)$ と表わす．任意に固定された k に対して，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_k(n)$ を求めよ．

(3) (1) の結果を利用して，級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\left(1 - \cos\frac{k}{n}\right)$ の値を求めよ．

2021（R3）年度【4】問題〈フーリエ解析〉

【4】n を自然数とし、

$$\text{関数 } f(x)=\begin{cases} n(1-n|x|), & |x|\le 1/n, \\ 0, & |x|>1/n \end{cases} \quad \text{を考える。}$$

（1）関数 $f(x)$ を周期 2π の関数に拡張した関数を、記号を変えずに $f(x)$ で表わす。

$f(x)$ を以下のようにフーリエ級数展開するとき、各係数 a_0, a_k, b_k の値を計算せよ。

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{1}{n}}0\,dx+\int_{-\frac{1}{n}}^{0}(n+n^2x)\,dx+\int_{0}^{\frac{1}{n}}(n-n^2x)\,dx+\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}0\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left[nx+\frac{1}{2}n^2x^2\right]_{-\frac{1}{n}}^{0}+\left[nx-\frac{1}{2}n^2x^2\right]_{0}^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{(0+1)+\left(0-\frac{1}{2}\right)+(1-0)-\left(\frac{1}{2}-0\right)\right\}=\frac{1}{\pi}$$

【別解】

今回 $f(x)$ は偶関数であることに注意する。また、積分値が 0 になる区間は無視する。

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{1}{n}}(n-n^2x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left[nx-\frac{1}{2}n^2x^2\right]_{0}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{(1-0)-\left(\frac{1}{2}-0\right)\right\}=\frac{1}{\pi}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{1}{n}} 0\,dx + \int_{-\frac{1}{n}}^{0}(n+n^2x)\cos kx\;dx + \int_{0}^{\frac{1}{n}}(n-n^2x)\cos kx\;dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} 0\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[(n+n^2x)\frac{1}{k}\sin kx\right]_{-\frac{1}{n}}^{0} - \int_{-\frac{1}{n}}^{0} n^2\frac{1}{k}\sin kx\,dx\right\}$$

$$+\frac{1}{\pi}\left\{\left[(n-n^2x)\frac{1}{k}\sin kx\right]_{0}^{\frac{1}{n}} + \int_{0}^{\frac{1}{n}} n^2\frac{1}{k}\sin kx\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 - \int_{-\frac{1}{n}}^{0} n^2\frac{1}{k}\sin kx\,dx\right) + \frac{1}{\pi}\left(0 + \int_{0}^{\frac{1}{n}} n^2\frac{1}{k}\sin kx\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{n^2}{k^2}\cos kx\right]_{-\frac{1}{n}}^{0} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{n^2}{k^2}\cos kx\right]_{0}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{n^2}{k^2}\left(1-\cos\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{\pi}\frac{n^2}{k^2}\left(\cos\frac{k}{n}-1\right) = \frac{2}{\pi}\frac{n^2}{k^2}\left(1-\cos\frac{k}{n}\right)$$

【別解】

偶関数と偶関数の積は偶関数であることに注意する。積分値が 0 になる区間は無視する。

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{1}{n}}(n-n^2x)\cos kx\;dx = \frac{2}{\pi}\left\{\left[(n-n^2x)\frac{1}{k}\sin kx\right]_{0}^{\frac{1}{n}} + \int_{0}^{\frac{1}{n}} n^2\frac{1}{k}\sin kx\,dx\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{n^2}{k^2}\cos kx\right]_{0}^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{\pi}\frac{n^2}{k^2}\left(1-\cos\frac{k}{n}\right)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{1}{n}} 0\,dx + \int_{-\frac{1}{n}}^{0}(n+n^2x)\sin kx\;dx + \int_{0}^{\frac{1}{n}}(n-n^2x)\sin kx\;dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} 0\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-(n+n^2x)\frac{1}{k}\cos kx\right]_{-\frac{1}{n}}^{0} + \int_{-\frac{1}{n}}^{0} n^2\frac{1}{k}\cos kx\,dx\right\}$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left\{\left[-(n-n^2x)\frac{1}{k}\cos kx\right]_{0}^{\frac{1}{n}} - \int_{0}^{\frac{1}{n}} n^2\frac{1}{k}\cos kx\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{(-n-0) + \int_{-\frac{1}{n}}^{0} n^2\frac{1}{k}\cos kx\,dx\right\} + \frac{1}{\pi}\left\{(0+n) - \int_{0}^{\frac{1}{n}} n^2\frac{1}{k}\cos kx\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{n^2}{k^2}\sin kx\right]_{-\frac{1}{n}}^{0} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{n^2}{k^2}\sin kx\right]_{0}^{\frac{1}{n}} = 0$$

【別解】

偶関数と**奇関数**の積は**奇関数**であることに注意すると、計算するまでもない。

$$\therefore\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = 0$$

よって、各係数 a_0, a_k, b_k の値は、

$$a_0 = \frac{1}{\pi},\quad a_k = \frac{2}{\pi}\frac{n^2}{k^2}\left(1-\cos\frac{k}{n}\right),\quad b_k = 0$$

（2）（1）で得た係数 a_k を $a_k(n)$ と表わす。
任意に固定された k に対して、極限値 $\lim_{n\to\infty} a_k(n)$ を求めよ。

（1）より、

$$a_k(n) = \frac{2}{\pi}\frac{n^2}{k^2}\left(1-\cos\frac{k}{n}\right)$$

ここで、$\frac{k}{n} = a$ とすると、極限値は次式に書き換えられる。

$$\lim_{n\to\infty} a_k(n) = \lim_{a\to 0}\frac{2}{\pi}\frac{1}{a^2}(1-\cos a)$$

$$\lim_{a\to 0}\frac{2}{\pi}a^2(1-\cos a) = \lim_{a\to 0}\frac{2}{\pi}\frac{1}{a^2}\frac{(1-\cos a)(1+\cos a)}{(1+\cos a)}$$

$$= \lim_{a\to 0}\frac{2}{\pi}\frac{\sin^2 a}{a^2}\frac{1}{(1+\cos a)} = \frac{1}{\pi}$$

ここで、

$$\lim_{a\to 0}\frac{\sin a}{a} = 1$$

は断りなく用いている。

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_k(n) = \frac{1}{\pi}$$

【別解】ロピタルの定理を用いる。

$$\lim_{n\to\infty} a_k(n) = \lim_{a\to 0}\frac{2}{\pi}\frac{(1-\cos a)}{a^2} = \lim_{a\to 0}\frac{2}{\pi}\frac{\sin a}{2a} = \frac{1}{\pi}$$

（3）（1）の結果を利用して、

級数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(1-\cos\frac{k}{n}\right)$ の値を求めよ。

（1）の結果より、

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\frac{n^2}{k^2}\left(1-\cos\frac{k}{n}\right)\cos kx\right)$$

ここで、$x=0$ を代入する。

$$f(0)\sim\frac{1}{2\pi}+\frac{2n^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(1-\cos\frac{k}{n}\right)$$

また、問題文より、

$$f(0)=n(1-n|0|)=n$$

以上より、

$$\frac{1}{2\pi}+\frac{2n^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(1-\cos\frac{k}{n}\right)=n$$

$$\frac{2n^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(1-\cos\frac{k}{n}\right)=n-\frac{1}{2\pi}$$

$$\therefore\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(1-\cos\frac{k}{n}\right)=\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{4n^2}$$

2021（R3）年度 講評

【1】数学的帰納法、微分するタイプ。

べき零行列の性質について。

【2】留数定理は知っておく。不等式の評価は慣れておきたい。

（3）の積分は実部・虚部で分けて考えるタイプ。しんどい。

【3】二階線形微分方程式。

解答では、定数変化法を用いて特殊解を求めたが、未定係数法を使うべきだろう。

【4】フーリエ係数の求め方は知っておく。

偶関数・奇関数の取り扱いで計算量がグンと減る。