1. つぎの各問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)=x^3-3xy^2+2y^3+4$ を考える.

(1-a) 偏導関数 $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ を求めよ.

(1-b) $f(x,y)=0$ によって y を x の陰関数として定めるとき, $\dfrac{dy}{dx}=0$ を満たす点 (x,y) を求めよ.

(2) a を実定数とし, 行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 2 & 1 & a^2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ を考える.

(2-a) 行列 A の固有値を求めよ.

(2-b) 行列 A が対角化可能となる a の値をすべて求めよ.

2. 複素関数 $f(z)=\dfrac{e^z(z+2)}{(z-1)^2}$ を考える.

(1) $f(z)$ の $z=1$ を中心とするローラン展開 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-1)^n$ の主要部 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-1)^n$ を求めよ.

(2) $\dfrac{1}{f(z)}$ の $z=-2$ を中心とするローラン展開 $\dfrac{1}{f(z)}=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n(z+2)^n$ の主要部 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1}b_n(z+2)^n$ を求めよ.

(3) 原点を中心とする半径3の円周を反時計回りに一周する積分路を C とする. 複素積分 $\displaystyle\int_C\left(f(z)+\frac{1}{f(z)}\right)dz$ の値を求めよ.

3. 未知関数 $x(t)$ の $\pi-t$ における値 $x(\pi-t)$ と, t における微分係数 $x'(t)$ の間につぎの関係が成立しているとする.

$$x'(t)+x(\pi-t)=0,\quad -\infty<t<\infty \tag{$*$}$$

(1) $y(t)=x(\pi-t)$ とおくとき, 線形微分方程式系 $\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めよ.

(2) (1) で得られた微分方程式系の一般解を求めよ.

(3) (2) の結果を用いて, $(*)$ を満たす $x(t)$ を任意定数を一つ含む形で求めよ.

(裏面へ続く)

2022（R4）年度【１】問題〈微分積分・線形代数〉

（１）関数 $f(x,y)=x^3-3xy^2+2y^3+4$ を考える。

（1－a）偏導関数 $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ を求めよ。

$$\therefore f_x(x,y)=3x^2-3y^2 \quad \therefore f_y(x,y)=-6xy+6y^2$$

（1－b）$f(x,y)=0$ によって y を x の陰関数として定めるとき、

$\dfrac{dy}{dx}=0$ を満たす点 (x,y)を求めよ。

$$f(x,y)=x^3-3xy^2+2y^3+4=0 \qquad (*)$$

両辺 x で微分する。ここで陰関数に注意する。

$$3x^2-(3y^2+6xyy')+6y^2y'=0$$

$$(2y^2-2xy)y'=y^2-x^2$$

$$2y(y-x)y'-(y+x)(y-x)=0$$

$$(y-x)\{2yy'-(y+x)\}=0$$

$$\therefore y'=\frac{x+y}{2y}=0 \quad (\because x\neq y)$$

※ここで、$y=x$ のときは題意を満たさないことが $(*)$ に代入することで確かめられる。

よって、上式を満たす点は、次式を満たす。

$$x+y=0$$

ここで、$y=-x$ のとき、$(*)$ に代入すると、

$$f(x,y)=x^3-3x(-x)^2+2(-x)^3+4$$

$$=x^3-3x^3-2x^3+4=-4x^3+4$$

$f(x,y)=0$ を解くと、$-4x^3+4=0$

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$$

したがって、題意を満たす点 (x,y) は、実数を考えて、

$$(x,y)=(1,-1)$$

（２）a を実定数とし、行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 2 & 1 & a^2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ を考える。

（2－a）行列 A の固有値を求めよ。

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & a\\ -2 & \lambda-1 & -a^2\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-1)^2(\lambda-3)-4(\lambda-3)$$
$$=(\lambda-3)(\lambda^2-2\lambda-3)$$
$$=(\lambda-3)^2(\lambda+1)$$

固有方程式 $|\lambda E-A|=(\lambda-3)^2(\lambda+1)=0$ を解くと、固有値は重解を含む以下の値となる。

$$\therefore \lambda=-1,3$$

（2－b）行列 A が対角化可能となる a の値を求めよ。

n 次正方行列が対角化可能であるための必要十分条件を考える。

行列 A は、重複度 2 の重根 3 を持つ。このとき、

$$A-3E=\begin{pmatrix}-2 & 2 & a\\ 2 & -2 & a^2+a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

このランクが $3-2=1$ となればよいので、

$$a^2+a=a(a+1)=0$$

$$\therefore a=0,-1$$

【対角化可能条件】

n 次正方行列 A から n 本の固有ベクトルを求められるとき、行列 A は対角化可能である。

〈重解ごとの場合分け〉

1．n 次正方行列 A の固有値に重解がない場合　→**対角化可能**

2．n 次正方行列 A の固有値が n 重解の場合　→**対角化不可能**（$A-\lambda E=O$ を除く）

3．n 次正方行列 A の固有値に n 重解ではないが重解が含まれる場合

→ 実際に固有ベクトルをしらべ、重解の数だけ固有ベクトルが出てくれば**対角化可能**

→ $rank(A-\lambda E)=n-m$ となればよい。ここで、λ は重解で、m はその重複度。

2022（R4）年度【２】問題〈複素関数〉

【２】複素関数

$$f(z)=\frac{e^z(z+2)}{(z-1)^2}$$

を考える。

（１）$f(z)$ の $z=1$ を中心とするローラン展開

$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-1)^n$　の主要部　$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-1)^n$ を求めよ。

・ローラン展開

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}dz$$

ローラン展開において、負べきの項の和を主要部という。

特に、点 a を中心とするローラン展開における a_{-1} を $f(z)$ の $z=a$ における留数という。

・留数定理

関数 $f(z)$ が正則で、ある領域内に描かれた単一閉曲線 C があり、

C の内部で $g(z)$ はその極 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 以外の点では正則であるとする。このとき、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C g(z)dz=\mathrm{Res}[g,a_1]+\mathrm{Res}[g,a_2]+\cdots+\mathrm{Res}[g,a_m]$$

・留数の求め方

点 a が関数 $f(z)$ の１位の極であれば、

$$\mathrm{Res}[g,a]=\lim_{z\to a}[(z-a)g(z)]$$

点 a が関数 $f(z)$ の２位の極であれば、

$$\mathrm{Res}[g,a]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to a}\left[\frac{d}{dz}(z-a)^2g(z)\right]$$

$f(z)$ の $z=1$ を中心とするローラン展開は、次式とおける。

$$f(z)=\frac{a_{-2}}{(z-1)^2}+\frac{a_{-1}}{(z-1)^1}+\cdots$$

留数定理を用いて複素積分を行うことで、係数 a_{-2}, a_{-1} を求める。

$$a_{-2} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\frac{e^z(z+2)}{(z-1)^2}}{(z-1)^{-2+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^z(z+2)}{(z-1)^1}dz = \mathrm{Res}[g,1] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{e^z(z+2)}{(z-1)^1}\right] = 3e$$

$$a_{-1} = \mathrm{Res}[f(z),1] = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\left[\frac{d}{dz}(z-1)^2\frac{e^z(z+2)}{(z-1)^2}\right] = \lim_{z\to 1}[e^z(z+2)+e^z] = 4e$$

よって、主要部は、

$$\therefore \frac{3e}{(z-1)^2} + \frac{4e}{z-1}$$

（2）$\frac{1}{f(z)}$ の $z=-2$ を中心とするローラン展開

$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z+2)^n$ の主要部 $\sum_{n=-\infty}^{-1} b_n(z+2)^n$ を求めよ。

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z-1)^2}{e^z(z+2)}$$

$\frac{1}{f(z)}$ の $z=-2$ を中心とするローラン展開は、次式とおける。

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{b_{-1}}{(z+2)^1} + \cdots$$

留数定理を用いて複素積分を行うことで、係数 a_{-1} を求める。

$$a_{-1} = \mathrm{Res}\left[\frac{1}{f(z)}, -2\right] = \lim_{z\to -2}\left[(z+2)\frac{(z-1)^2}{e^z(z+2)}\right] = \lim_{z\to -2}\left[\frac{(z-1)^2}{e^z}\right] = 9e^2$$

よって、主要部は、

$$\therefore \frac{9e^2}{z+2}$$

（3）原点を中心とする半径3の円周を反時計回りに一周する積分路を C とする。

複素積分 $\int_C \left(f(z)+\frac{1}{f(z)}\right)dz$ の値を求めよ。

$$\int_C \left(f(z)+\frac{1}{f(z)}\right)dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C \frac{1}{f(z)}dz$$

（1）（2）の結果を用いて、留数定理より、

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \cdot (4e)$$

$$\int_C \frac{1}{f(z)}dz = 2\pi i \cdot (9e^2)$$

よって、

$$\therefore \int_C \left(f(z)+\frac{1}{f(z)}\right)dz = 2\pi i(4e+9e^2)$$

2022（R4）年度【３】問題〈微分方程式〉

【３】未知関数 $x(t)$ の $\pi - t$ における値 $x(\pi - t)$ と、t における微分係数 $x'(t)$ の間につぎの関係が成立しているとする。

$$x'(t) + x(\pi - t) = 0, \quad -\infty < t < \infty \qquad (*)$$

（１）$y(t) = x(\pi - t)$ とおくとき、線形微分方程式

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

を満たす行列 A を求めよ。

$(*)$ より、

$$x'(t) = -x(\pi - t) = -y(t)$$

また、

$$y'(t) = -x'(\pi - t) = -\{-x(\pi - (\pi - t))\} = x(t)$$

よって、

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

（２）（１）で得られた微分方程式の一般解を求めよ。

$$\boldsymbol{x}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

とおくと、初期値が与えられてない場合、この微分方程式の解は次式となる。

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{c}$$

ここで、C_1, C_2 を任意定数として、

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

である。

対角化を利用して行列指数関数 $e^{\boldsymbol{At}}$ を求める。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$$

固有方程式 $|A - \lambda E| = (\lambda + i)(\lambda - i) = 0$ を解くと、固有値は以下の値となる。

$$\therefore \lambda = \pm i$$

(i) $\lambda = i$ のとき

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -ix - y = 0 \\ x - iy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = -ix$$

s_1 を任意定数として、固有ベクトルは、

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

(ii) $\lambda = -i$ のとき

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ix - y = 0 \\ x + iy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = ix$$

s_2 を任意定数として、固有ベクトルは、

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

以上より、

$$\boldsymbol{A = P\Lambda P^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

よって、

$$e^{\boldsymbol{At}} = \boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{\Lambda t}}\boldsymbol{P^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ -ie^{it} & ie^{-it} \end{pmatrix} \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} ie^{it} + ie^{-it} & -e^{it} + e^{-it} \\ e^{it} - e^{-it} & ie^{it} + ie^{-it} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} & \dfrac{-e^{it} + e^{-it}}{2i} \\ \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i} & \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} \end{pmatrix}$$

オイラーの公式 $e^{it} = \cos t + i \sin t$ を用いると、

$$\therefore e^{\boldsymbol{At}} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

したがって、微分方程式の解は次式となる。

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos t - C_2 \sin t \\ C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{pmatrix}$$

（３）（２）の結果を用いて、$(*)$ を満たす $x(t)$ を任意定数を一つ含む形で求めよ。

$y(t) = x(\pi - t)$ より（２）の結果を用いると、次式を得る。

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos t - C_2 \sin t \\ x(\pi - t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{cases}$$

ここで、

$$x\big(\pi - (\pi - t)\big) = C_1 \sin(\pi - t) + C_2 \cos(\pi - t)$$

$$= C_1 \sin t - C_2 \cos t$$

以上より、

$$C_1 \cos t - C_2 \sin t = C_1 \sin t - C_2 \cos t$$

$$(C_1 + C_2)(\cos t - \sin t) = 0$$

$$\therefore C_1 + C_2 = 0$$

よって、$C_2 = -C_1$

したがって、$x(t)$ は次式となる。

$$x(t) = C_1(\cos t + \sin t)$$

逆も満たす。

4. 関数 $f(x) = e^{-|x|}\sin x$ と $g(x) = e^{-|x|}\cos x$ を考える.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ と $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx$ の値は有限であることを示せ.

(2) $f(x)$ と $g(x)$ のフーリエ変換を

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}dx, \quad \hat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-itx}dx, \quad -\infty < t < \infty$$

とする. $\hat{g}(t) + i\hat{f}(t)$ と $\hat{g}(t) - i\hat{f}(t)$ を計算せよ.

(3) (2) の結果を用いて, $\hat{f}(t)$ と $\hat{g}(t)$ を求めよ.

2022（R4）年度【4】問題〈フーリエ解析〉

【4】関数 $f(x) = e^{-|x|}\sin x$ と $g(x) = e^{-|x|}\cos x$ を考える。

（1）

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$ と $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\,dx$ の値は有限であることを示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{0}|f(x)|\,dx + \int_{0}^{\infty}|f(x)|\,dx$$

と、(i) $x \geq 0$ のときと (ii) $x \leq 0$ のときに分けて考える。

(i) $x \geq 0$ のとき

$$|f(x)| = \left|e^{-|x|}\sin x\right| = e^{-|x|}|\sin x|$$

$$0 \leq e^{-|x|}|\sin x| \leq e^{-x}$$

$$0 \leq \int_{0}^{\infty}|f(x)|\,dx \leq \int_{0}^{\infty}e^{-x}\,dx$$

ここで、

$$\int_{0}^{\infty}e^{-x}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{0}^{n}e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\{-[e^{-x}]_0^n\} = \lim_{n\to\infty}\{-(e^{-n}-1)\} = 1$$

(ii) $x \leq 0$ のとき、同様にして、

$$0 \leq \int_{-\infty}^{0}|f(x)|\,dx \leq \int_{-\infty}^{0}e^{x}\,dx = 1$$

よって、(i)(ii) より、

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$ は有限

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\,dx=\int_{-\infty}^{0}|g(x)|\,dx+\int_{0}^{\infty}|g(x)|\,dx$$

と、(iii) $x\geq 0$ のときと (iv) $x\leq 0$ のときに分けて考える。

(iii) $x\geq 0$ のとき

$$|g(x)|=\left|e^{-|x|}\cos x\right|=e^{-|x|}|\cos x|$$

$$0\leq e^{-|x|}|\cos x|\leq e^{-x}$$

$$0\leq\int_{0}^{\infty}|f(x)|\,dx\leq\int_{0}^{\infty}e^{-x}\,dx$$

ここで、

$$\int_{0}^{\infty}e^{-x}\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{n}e^{-x}\,dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{-[e^{-x}]_{0}^{n}\}=\lim_{n\to\infty}\{-(e^{-n}-1)\}=1$$

(iv) $x\leq 0$ のとき、同様にして、

$$0\leq\int_{-\infty}^{0}|g(x)|\,dx\leq\int_{-\infty}^{0}e^{x}\,dx=1$$

よって、(iii)(iv) より、

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\,dx \text{ は有限}$$

(2) $f(x)$ と $g(x)$ のフーリエ変換を

$$\hat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}\,dx,\quad \hat{g}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-itx}\,dx,\quad -\infty<t<\infty$$

とする。$\hat{g}(t)+i\hat{f}(t)$ と $\hat{g}(t)-i\hat{f}(t)$ を計算せよ。

$$\hat{g}(t)+i\hat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-itx}\,dx+i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-|x|}\cos x\right)e^{-itx}\,dx+i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-|x|}\sin x\right)e^{-itx}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}(\cos x+i\sin x)e^{-itx}\,dx$$

ここで、オイラーの公式を用いる。

$$\hat{g}(t)+i\hat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}e^{ix}e^{-itx}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}e^{i(1-t)x}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{x}e^{i(1-t)x}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-x}e^{i(1-t)x}\,dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{1+i(1-t)}e^{x+i(1-t)x}\right]_{-n}^{0}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{-1+i(1-t)}e^{-x+i(1-t)x}\right]_{0}^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1+i(1-t)}-\frac{1}{1+i(1-t)}e^{-n}e^{-i(1-t)n}\right)$$

$$+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1+i(1-t)}e^{-n}e^{i(1-t)n}-\frac{1}{-1+i(1-t)}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+i(1-t)}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1-i(1-t)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{1+(1-t)^2}$$

$$\therefore\ \hat{g}(t)+i\hat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{t^2-2t+2}$$

同様に、

$$\hat{g}(t)-i\hat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}(\cos x-i\sin x)e^{-itx}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}e^{-ix}e^{-itx}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{x}e^{-i(1+t)x}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-x}e^{-i(1+t)x}\,dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{1-i(1+t)}e^{x-i(1+t)x}\right]_{-n}^{0}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{-1-i(1+t)}e^{-x-i(1+t)x}\right]_{0}^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-i(1+t)}-\frac{1}{1+i(1+t)}e^{-n}e^{i(1+t)n}\right)$$

$$+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{-1-i(1+t)}e^{-n}e^{-i(1+t)n}-\frac{1}{-1-i(1+t)}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1-i(1+t)}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+i(1+t)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{1+(1+t)^2}$$

$$\therefore\ \hat{g}(t)-i\hat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{t^2+2t+2}$$

（3）（2）の結果を用いて、$\hat{f}(t)$ と $\hat{g}(t)$ を求めよ。

（2）の結果より、

$$\hat{g}(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{t^2-2t+2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{t^2+2t+2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(t^2+2t+2)+(t^2-2t+2)}{(t^2-2t+2)(t^2+2t+2)}$$

$$\therefore \hat{g}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2(t^2+2)}{t^4+4}$$

$$\hat{f}(t)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{t^2-2t+2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{t^2+2t+2}\right)=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\frac{4t}{t^4+4}$$

$$\therefore \hat{f}(t)=-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{4t}{t^4+4}$$

2022（R4）年度 講評

【1】行列の固有値の求め方は慣れておきたい。対角化可能条件に関しても知っておく。

【2】ローラン展開および留数定理は知っておく。

【3】連立線形微分方程式。行列指数関数は、制御工学Ⅱの講義資料を参考にされたい。

【4】フーリエ変換。（1）は不等式で評価するところが一考か。

極限に関して、オイラーの公式を考えるところも。

2022 数学　3.(2)の別解　上田一輝

3.

(2)　Aの固有値を調べてみる。iを虚数単位とする。

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\therefore \lambda = \pm i$$

ここで以下の性質を用いる。

固有値が虚数$\lambda = \alpha + i\beta$のとき

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$

の形の連立微分方程式の解は、ある正則行列Pを用いて

$$\boldsymbol{x} = e^{\alpha t} P \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \tag{a}$$

と書ける。ただし$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, C_1, C_2$は定数である。

求められた固有値に対する固有ベクトルを求める。$\lambda = i$に対して

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって固有ベクトルとして

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

が取れる。

ここで正則行列Pは固有値を二つ並べて

$$P = (\text{実部} \quad \text{虚部})$$

と与えられることが知られている。

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

のように固有値が実部と虚部に分けられるとすると、正則行列Pは

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。また

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。(実際に$P^{-1}AP$を計算しても上のようになることが確かめられる。)
よって(a)より

$$\boldsymbol{x} = e^{0t}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta t & \sin\beta t\\ -\sin\beta t & \cos\beta t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-\sin t & \cos t\\ \cos\beta t & \sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-C_1\sin t + C_2\cos t\\ C_1\cos t + C_2\sin t\end{pmatrix}$$