1. つぎの各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)=e^{x+y}$ に対して，平均値定理

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=hf_x(x+\theta h,y+\theta k)+kf_y(x+\theta h,y+\theta k)\quad(0<\theta<1)$$

が成り立つことが知られている．上式を満たす θ を，h と k を用いて表わせ．ただし，$h+k\neq 0$ とする．さらに，$h+k\neq 0$ を保った状態で $(h,k)\to(0,0)$ としたときの θ の極限，すなわち $\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h+k\neq 0}}\theta$ を求めよ．

(2) 行列 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&3\\1&-2&0\end{pmatrix}$ と $AB=\begin{pmatrix}0&2\\-2&4\\1&0\end{pmatrix}$ を満たす行列 B を考える．

(2-a) $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ とおく．$AX=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$, $AY=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$ を満たすベクトル X, Y を求めよ．

(2-b) (2-a) の結果を用いて，行列 B を求めよ．

2. n を自然数とする．複素関数 $f_n(z)=(z-1)(z-2)\cdots(z-n)$ に対して，複素積分 $\displaystyle\int_{C_n}\frac{zf_n'(z)-nf_n(z)}{zf_n(z)}dz$ を n の関数として $\Phi(n)$ と表わす．ただし，C_n は原点を中心として反時計方向に向き付けられた半径 $n+1$ の円とする．

(1) $\Phi(1)$ と $\Phi(2)$ の値を求めよ．

(2) 3以上の自然数 n に対して，$\Phi(n)$ の値を求めよ．

3. $y=y(x)$, $x>0$ に関するつぎの微分方程式

$$xy''-(2x-1)y'+(x-1)y=0 \qquad (*)$$

を考える．

(1) $y=e^x$ が方程式 $(*)$ の解の一つであることを示せ．

(2) $u=ye^{-x}$ とおき，u に関する微分方程式を導け．さらにこの微分方程式を解き，方程式 $(*)$ の一般解を求めよ．

(3) 方程式 $(*)$ の一組の基本解を求め，そのロンスキアン $W(x)$ を計算せよ．

（裏面へ続く）

2023（R5）年度【１】問題〈微分積分・線形代数〉

（１）関数 $f(x,y)=e^{x+y}$ に対して、平均値定理

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=hf_x(x+\theta h,y+\theta k)+kf_y(x+\theta h,y+\theta k)\quad(0<\theta<1)$$

が成り立つことが知られている。上式を満たす θ を、h と k を用いて表わせ。

ただし、$h+k\neq 0$ とする。さらに、$h+k\neq 0$ を保った状態で $(h,k)\to(0,0)$ としたときの θ の極限、すなわち $\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h+k\neq 0}}\theta$ を求めよ。

$$f(x+h,y+k)=e^{x+h+y+k}=e^{x+y}\cdot e^{h+k},\quad f(x+\theta h,y+\theta k)=e^{x+\theta h+y+\theta k}$$

$$hf_x(x+\theta h,y+\theta k)=he^{x+\theta h+y+\theta k}=he^{x+y}\cdot e^{\theta(h+k)}$$

$$kf_y(x+\theta h,y+\theta k)=ke^{x+\theta h+y+\theta k}=ke^{x+y}\cdot e^{\theta(h+k)}$$

よって、

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=e^{x+y}(e^{h+k}-1)$$

$$hf_x(x+\theta h,y+\theta k)+kf_y(x+\theta h,y+\theta k)=e^{x+y}\cdot e^{\theta(h+k)}(h+k)$$

平均値定理より、

$$e^{x+y}(e^{h+k}-1)=e^{x+y}\cdot e^{\theta(h+k)}(h+k)$$

$$\therefore e^{\theta(h+k)}=\frac{e^{h+k}-1}{h+k}\ (\because h+k\neq 0)$$

両辺 log とって、

$$\theta(h+k)=\ln\frac{e^{h+k}-1}{h+k}\qquad\therefore\theta=\frac{1}{h+k}\ln\frac{e^{h+k}-1}{h+k}$$

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h+k\neq 0}}\theta=\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h+k\neq 0}}\frac{1}{h+k}\ln\frac{e^{h+k}-1}{h+k}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\ln\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}$$

ロピタルの定理を繰り返す。

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\ln\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1}\cdot\frac{-(e^{\alpha}-1)+\alpha e^{\alpha}}{\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-e^{\alpha}+1+\alpha e^{\alpha}}{\alpha(e^{\alpha}-1)}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-e^{\alpha}+e^{\alpha}+\alpha e^{\alpha}}{(e^{\alpha}-1)+\alpha e^{\alpha}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha e^{\alpha}}{(e^{\alpha}-1)+\alpha e^{\alpha}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{e^{\alpha}+\alpha e^{\alpha}}{e^{\alpha}+e^{\alpha}+\alpha e^{\alpha}}$$

$$\therefore\lim_{\alpha\to 0}\frac{e^{\alpha}+\alpha e^{\alpha}}{e^{\alpha}+e^{\alpha}+\alpha e^{\alpha}}=\frac{e^{0}}{e^{0}+e^{0}}=\frac{1}{2}$$

（２）行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$ と $AB=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ を満たす行列 B を考える。

（2－a） $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$ とおく。

$AX=\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$, $AY=\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 0\end{pmatrix}$ を満たすベクトル X,Y を求めよ。

$$AX=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_3\\ x_1+2x_2+3x_3\\ x_1-2x_2\end{pmatrix}$$

よって、

$$\begin{cases}x_1+x_3=0\\ x_1+2x_2+3x_3=-2\\ x_1-2x_2=1\end{cases}$$

$$\therefore\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$

$$AY=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1+y_3\\ y_1+2y_2+3y_3\\ y_1-2y_2\end{pmatrix}$$

よって、

$$\begin{cases}y_1+y_3=2\\ y_1+2y_2+3y_3=4\\ y_1-2y_2=0\end{cases}$$

$$\therefore\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

（2－b）（2－a）の結果を用いて、行列 B を求めよ。

ベクトル X,Y は、$AX=\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$, $AY=\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 0\end{pmatrix}$ を満たすので、

$AB=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ を満たす行列 B は、（2－a）の結果を用いて、

$$B=\left(\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

2023（R5）年度【２】問題〈複素関数〉

【２】n を自然数とする。複素関数 $f_n(z)=(z-1)(z-2)\cdots(z-n)$ に対して、

複素積分 $\displaystyle\int_{C_n}\frac{zf_n{}'(z)-nf_n(z)}{zf_n(z)}dz$ を n の関数として $\Phi(n)$ と表わす。

ただし、C_n は原点を中心として反時計回りに向き付けられた半径 $n+1$ の円とする。

（１）$\Phi(1)$ と $\Phi(2)$ の値を求めよ。

$$\Phi(1)=\int_{C_1}\frac{z-(z-1)}{z(z-1)}dz=\int_{C_1}\frac{1}{z(z-1)}dz$$

$$\Phi(2)=\int_{C_2}\frac{z(2z-3)-2(z-1)(z-2)}{z(z-1)(z-2)}dz=\int_{C_2}\frac{3z-4}{z(z-1)(z-2)}dz$$

・留数定理

関数 $f(z)$ が正則で、ある領域内に描かれた単一閉曲線 C があり、

C の内部で $g(z)$ はその極 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 以外の点では正則であるとする。このとき、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C g(z)dz=\mathrm{Res}[g,a_1]+\mathrm{Res}[g,a_2]+\cdots+\mathrm{Res}[g,a_m]$$

・留数の求め方

点 a が関数 $f(z)$ の１位の極であれば、

$$\mathrm{Res}[g,a]=\lim_{z\to a}[(z-a)g(z)]$$

$$\Phi(1)=\int_{C_1}\frac{1}{z(z-1)}dz=2\pi i(\mathrm{Res}[g,0]+\mathrm{Res}[g,1])$$

$$=2\pi i(-1+1)=0$$

$$\therefore\Phi(1)=0$$

$$\Phi(2)=\int_{C_2}\frac{3z-4}{z(z-1)(z-2)}dz=2\pi i(\mathrm{Res}[g,0]+\mathrm{Res}[g,1]+\mathrm{Res}[g,2])$$

$$=2\pi i(-2+1+1)=0$$

$$\therefore\Phi(2)=0$$

（２） ３以上の自然数 n に対して、$\Phi(n)$ の値を求めよ。

$n \geq 1$ に対して、$\Phi(n) = 0$ と仮定して、数学的帰納法を用いて証明する。

① $n = 1$ のとき、（１）より $\Phi(n) = 0$

② $n = k$ のとき、$\Phi(k) = 0$ と仮定して、$n = k + 1$ のときを考える。

$f_{k+1}(z) = f_k(z)\{z - (k+1)\}$ であることに注意して、

$$\Phi(k+1) = \int_{C_{k+1}} \frac{zf_{k+1}{}'(z) - (k+1)f_{k+1}(z)}{zf_{k+1}(z)} dz$$

$$= \int_{C_{k+1}} \frac{z[f_k{}'(z)\{z-(k+1)\} + f_k(z)] - (k+1)\{z-(k+1)\}f_k(z)}{z\{z-(k+1)\}f_k(z)} dz$$

$$= \int_{C_{k+1}} \frac{zf_k{}'(z)\{z-(k+1)\} + zf_k(z) - k\{z-(k+1)\}f_k(z) - \{z-(k+1)\}f_k(z)}{z\{z-(k+1)\}f_k(z)} dz$$

$$= \int_{C_{k+1}} \frac{zf_k{}'(z) - kf_k(z)}{zf_k(z)} dz + \int_{C_{k+1}} \frac{(k+1)}{z\{z-(k+1)\}} dz$$

ここで、仮定より、

$$\int_{C_{k+1}} \frac{zf_k{}'(z) - kf_k(z)}{zf_k(z)} = \int_{C_k} \frac{zf_k{}'(z) - kf_k(z)}{zf_k(z)} = \Phi(k) = 0$$

よって、

$$\Phi(k+1) = \int_{C_{k+1}} \frac{(k+1)}{z\{z-(k+1)\}} dz$$

留数定理より、

$$\int_{C_{k+1}} \frac{(k+1)}{z\{z-(k+1)\}} dz = 2\pi i(\mathrm{Res}[g, 0] + \mathrm{Res}[g, k+1])$$

$$= 2\pi i(-1+1) = 0$$

したがって、$\Phi(k) = 0$ と仮定したとき、

$$\Phi(k+1) = 0$$

以上、①②より、３以上の自然数 n に対して、

$$\Phi(n) = 0$$

2023（R5）年度【3】問題〈微分方程式〉

【3】$y = y(x),\ x > 0$ に関するつぎの微分方程式

$$xy'' - (2x-1)y' + (x-1)y = 0 \qquad (*)$$

を考える。

（1）$y = e^x$ が方程式 $(*)$ の解の一つであることを示せ。

$y = e^x$ を方程式 $(*)$ に代入する。

$$xe^x - (2x-1)e^x + (x-1)e^x = 0$$

よって、$y = e^x$ は方程式 $(*)$ の解の一つである。

（2）$u = ye^{-x}$ とおき、u に関する微分方程式を導け。

さらにこの微分方程式を解き、方程式 $(*)$ の一般解を求めよ。

$u = ye^{-x}$ とおくと、

$$y = e^x u, \quad y' = e^x u + e^x u', \quad y'' = e^x u + e^x u' + e^x u' + e^x u''$$

これを方程式 $(*)$ に代入する。

$$xe^x(u'' + 2u' + u) - (2x-1)e^x(u' + u) + (x-1)e^x u = 0$$

$$\therefore x(u'' + 2u' + u) - 2x(u' + u) + (u' + u) + xu - u = 0$$

整理すると、u に関する微分方程式は、二階の微分方程式となる。

$$\therefore xu'' + u' = 0 \quad \therefore (xu')' = 0$$

よって、C_1 を任意定数として、この微分方程式の解は次式となる。

$$xu' = C_1 \quad \therefore u' = \frac{C_1}{x}$$

C_2 を任意定数として、再び積分する。

$$u = C_1 \ln x + C_2$$

したがって、方程式 $(*)$ の一般解は、$y = e^x u$ に上式を代入して、

$$y = e^x(C_1 \ln x + C_2)$$

（３）方程式 $(*)$ の一組の基本解を求め、そのロンスキアン $W(x)$ を求めよ。

〈定数変化法〉ロンスキアン

基本解を $y_1,\ y_2$ とすると、

ロンスキアン（ロンスキー行列） $W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ とおける。

x の値によらず $W(y_1,y_2)\neq 0$ であり、$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$ は逆行列をもつ。

（２）の結果より、方程式 $(*)$ の基本解は、

$$y_1=e^x,\quad y_2=e^x\ln x$$

よって、ロンスキアン $W(x)$ は、

$$\begin{aligned} W(x)&=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &=\begin{vmatrix} e^x & e^x\ln x \\ e^x & e^x\ln x+\dfrac{e^x}{x} \end{vmatrix} \\ &=e^x\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\right)-e^x\cdot e^x\ln x=\frac{e^{2x}}{x} \end{aligned}$$

$$\therefore W(x)=\frac{e^{2x}}{x}$$

---

4. n を 2 以上の自然数とし，関数

$$f(x)=\begin{cases} [|x|], & |x|\le n, \\ 0, & |x|>n \end{cases}$$

を考える．ただし，$[a]$ は a 以下の最大整数を表わす．

(1) $f(x)$ のグラフを描け．

(2) $f(x)$ のフーリエ変換 $\hat{f}(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dx,\ -\infty<t<\infty$ を求めよ．

(3) $1<L<2$ とする．(2) の結果を利用して，等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(nt)\cos(Lt)}{t}dt=\frac{\pi}{n-1}+\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(kt)\cos(Lt)}{t}dt$$

が成り立つことを示せ．

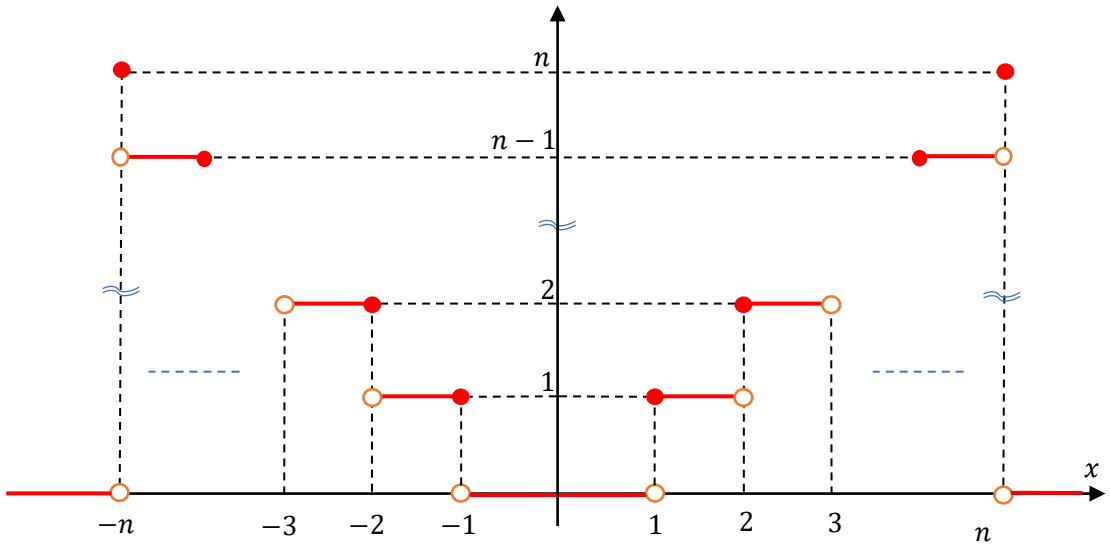
2023（R5）年度【4】問題〈フーリエ解析〉

【4】n を 2 以上の自然数とし、

$$\text{関数 } f(x)=\begin{cases}[|x|], & |x|\le n\\ 0, & |x|>n\end{cases}$$

を考える。ただし、$[a]$ は a 以下の最大整数を表わす。

（1）$f(x)$ のグラフを描け。



（2）$f(x)$ のフーリエ変換

$$\hat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}\,dx,\quad -\infty<t<\infty \quad \text{を求めよ。}$$

$$\hat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\begin{array}{l}(n-1)\displaystyle\int_{-n}^{-n+1}e^{-itx}\,dx+\cdots+2\int_{-3}^{-2}e^{-itx}\,dx+\int_{-2}^{-1}e^{-itx}\,dx\\ \quad+\displaystyle\int_{1}^{2}e^{-itx}\,dx+2\int_{2}^{3}e^{-itx}\,dx+\cdots+(n-1)\int_{n-1}^{n}e^{-itx}\,dx\end{array}\right)$$

ここで、

$$\int e^{-itx}\,dx=\frac{1}{-it}e^{-itx}+C \quad \therefore \int_{n-1}^{n}\frac{1}{-it}e^{-itx}\,dx=\frac{1}{-it}\left(e^{-itn}-e^{-it(n-1)}\right)$$

よって、各項整理すると、

$$\hat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{-it}\right)\left[\begin{matrix}(n-1)\left(e^{it(n-1)}-e^{itn}\right)+\cdots+2\left(e^{2it}-e^{3it}\right)+\left(e^{it}-e^{2it}\right)\\+\left(e^{-2it}-e^{-it}\right)+2\left(e^{-3it}-e^{-2it}\right)+\cdots+(n-1)\left(e^{-itn}-e^{-it(n-1)}\right)\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{-it}\right)\left[\left(e^{it}-e^{-it}\right)+\cdots+\left(e^{(n-1)it}-e^{-(n-1)it}\right)-(n-1)\left(e^{nit}-e^{-nit}\right)\right]$$

オイラーの公式を用いる。

$$e^{it}-e^{-it}=2i\sin t,\quad e^{nit}-e^{-nit}=2i\sin nt$$

$$\therefore \hat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{-it}\right)2i[\sin t+\cdots+\sin(n-1)t-(n-1)\sin nt]$$

$$=-\frac{1}{t}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\sin kt-(n-1)\sin nt\right]$$

したがって、

$$\therefore \hat{f}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[(n-1)\frac{\sin nt}{t}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin kt}{t}\right]$$

（3）$1<L<2$ とする。（2）の結果を利用して、等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(nt)\cos(Lt)}{t}dt=\frac{\pi}{n-1}+\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(kt)\cos(Lt)}{t}dt$$

フーリエ逆変換を行う。（2）の結果を利用して、

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(t)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)e^{itx}\,dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[(n-1)\frac{\sin nt}{t}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin kt}{t}\right]e^{itx}\,dt$$

$x=L$ のとき、フーリエ逆変換は次式となる。

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(t)\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[(n-1)\frac{\sin nt}{t}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin kt}{t}\right]e^{itL}\,dt$$

オイラーの公式を用いると、$e^{itL}=\cos Lt+i\sin Lt$ ゆえ、

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(t)\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[(n-1)\frac{\sin nt}{t}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin kt}{t}\right](\cos Lt+i\sin Lt)\,dt$$

問題文から、$x = L\ (1 < L < 2)$ のとき、値が 1 となることから、

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[(n-1)\frac{\sin nt}{t} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin kt}{t}\right](\cos Lt + i\sin Lt)\,dt$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}(n-1)\frac{\sin nt\,(\cos Lt + i\sin Lt)}{t}dt - \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin kt\,(\cos Lt + i\sin Lt)}{t}dt = \pi$$

実部と虚部に分け、実部を比較する。

$$\int_{-\infty}^{\infty}(n-1)\frac{\sin nt\cos Lt}{t} - \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin kt\cos Lt}{t}dt = \pi$$

$$\therefore (n-1)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin nt\cos Lt}{t} = \pi + \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin kt\cos Lt}{t}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(nt)\cos(Lt)}{t}dt = \frac{\pi}{n-1} + \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(kt)\cos(Lt)}{t}dt \quad \blacksquare$$

2023（R5）年度 講評

【１】平均値の定理。ロピタルの定理は使えるようにしておく。行列計算ではミスに注意。

【２】留数定理は知っておく。（３）では数学的帰納法を用いる。

【３】置き換えて、二階の微分方程式に。積の微分の形ゆえ、瞬殺。
特殊解を求める際に定数変化法で出てくるロンスキアン…。知らないと無理ゲー。

【４】フーリエ変換。ガウス記号。フーリエ逆変換。手が疲れる系。