平成 29 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：機械力学　［1 / 3］

(問題 [1]，[2] は別々の答案用紙に解答すること．)

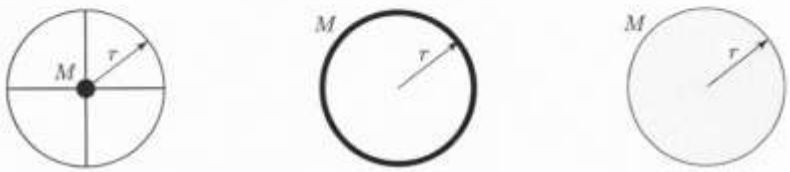
[1] 剛体の運動に関する以下の問いに答えよ．

(1) 図 1-1 に示す 3 種の車輪を考える．図 1-1(a) の車輪は，質量の無視できる半径 r のリングの中心に，同じく質量の無視できるスポークによって質量 M の質点を固定したものであり，以降は車輪 1 と呼ぶ．図 1-1(b) の車輪は，半径 r で厚みの無視できる質量 M の一様なリングであり，以降は車輪 2 と呼ぶ．図 1-1(c) の車輪は，半径 r で質量 M の一様な円板であり，以降は車輪 3 と呼ぶ．

以降これらの車輪の鉛直 2 次元平面内での並進と回転の運動について考えていく上で，車輪の中心（ちょうどそれぞれの車輪の重心にあたる）回りの慣性モーメントを求めたい．以下の慣性モーメントの定義に基づき，車輪 1，2，3 の中心回りの慣性モーメント I_1, I_2, I_3 はそれぞれ，0, Mr^2, $\frac{1}{2}Mr^2$ となることを示せ．

【慣性モーメントの定義】
剛体のある軸回りの慣性モーメント I は，剛体を構成する微小部分の質量を $\mathrm{d}m$ とし，軸とその微小部分との距離を r とすると，次式で定義される．

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m$$



(a) 車輪 1　(b) 車輪 2　(c) 車輪 3

図 1-1: 3 種の車輪

(2) 図 1-2 に示すように，滑らかに傾斜角が変化し，最後に十分長い水平部をもつスロープの水平部から h の高さまで車輪 1 を持ち上げ，スロープに接して静止した状態から静かに離して，スロープを転がり落とすことを考える．このとき，車輪 1 はスロープの上をすべることなく転がりながら落ちていくものとする．このとき，車輪 1 が水平部の端点から射出されるときの車輪の中心の水平方向の並進速度 v_f を求めよ．ただし重力加速度は g とし，以降の問いでも同様とする．

(3) 図 1-2 と同様に，今度は車輪 2 を同じ初期状態からすべることなく転がり落とすことを考える．このとき，車輪 2 が水平部の端点から射出されるときの車輪の中心の水平方向の並進速度 v'_f を求めよ．

平成 29 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：機械力学 ［2/3］

(4) 図 1-3 のように，十分な長さの糸を巻きつけた車輪 3 (糸の端点は車輪の外周上に固定) を摩擦の全くない滑らかな水平の台の上に置き，滑らかな滑車を介して糸のもう一方の端を質量 M のおもりにつなぎ，おもりと車輪がすべて静止しかつ糸が張られた状態から，静かにおもりを離して落下させることを考える．滑車の位置は，糸が車輪 3 を水平方向に引っ張るように調整されているものとする．

このとき，図 1-3 に示す落下するおもりの下向きの加速度 a_1 と車輪 3 の中心の水平方向の加速度 a_2 および車輪 3 の角加速度 $\dot{\omega}$ との間の関係式を求めよ．

(5) 問い (4) において，落下するおもりの下向きの加速度 a_1 を求めよ．

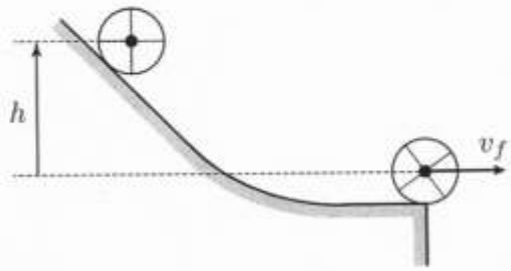


図 1-2: スロープを転がり落ちる車輪 1

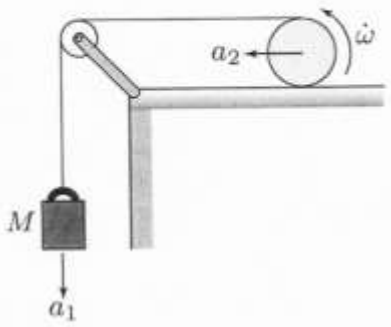


図 1-3: おもりの落下により巻きつけた糸がほどかれる車輪 3

2017（H29）年度【1】問題〈回転運動〉

【1】剛体の運動に関する以下の問いに答えよ。

（1）図 1-1 に示す 3 種の車輪を考える。

以降これらの車輪の鉛直 2 次元平面内での並進と回転の運動について考えていく上で、車輪の中心（ちょうどそれぞれの車輪の重心にあたる）回りの慣性モーメントを求めたい。以下の慣性モーメントの定義に基づき、車輪 1，2，3 の中心回りの慣性モーメント I_1, I_2, I_3 はそれぞれ $0, Mr^2, \frac{1}{2}Mr^2$ となることを示せ。

【慣性モーメントの定義】

剛体のある軸回りの慣性モーメント I は、剛体を構成する微小部分の質量を dm とし、軸とその微小部分との距離を r とすると、次式で定義される。

$$I = \int r^2\, dm$$

・質点における慣性モーメント

質量 M の質点が回転軸から距離 r の位置に存在するとき、この質点の慣性モーメントは次式で計算される。

$$I = r^2 \times M$$

(a) 車輪 1

質量 M の質点は回転軸上に存在するので $r = 0$ となる。ゆえに、

$$I_1 = 0 \quad \blacksquare$$

(b) 車輪 2

線密度は $M/2\pi r$, 弧の長さは $rd\theta$ ゆえ、

$$I_2 = \int_0^{2\pi} r^2 \frac{M}{2\pi r} r d\theta = \frac{Mr^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = Mr^2 \quad \blacksquare$$

(c) 車輪 3

体積密度を ρ, 微小体積を dv とすると、

$$I_3 = \int r^2 \rho dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} r^2 \rho dr \cdot r d\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r} r^3 dr = \rho \frac{2\pi r^4}{4} = \frac{1}{2} Mr^2 \quad \blacksquare$$

（2）図 1-2 に示すように、滑らかに傾斜角が変化し、最後に十分長い水平部をもつスロープの水平部から h の高さまで車輪 1 を持ち上げ、スロープに接して静止した状態から静かに離して、スロープを転がり落とすことを考える。このとき、車輪 1 はスロープの上をすべることなく転がり落ちていくものとする。このとき、**車輪 1 が水平部の端点から射出されるときの車輪の中心の水平方向の並進速度 v_f** を求めよ。ただし重力加速度は g とし、以降の問いでも同様とする。

エネルギー保存則より、位置エネルギーが運動エネルギーに変化する。

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_f{}^2$$

$$\therefore v_f = \sqrt{2gh}$$

（3）図 1-2 と同様に、今度は同じ初期状態からすべることなく転がり落とすことを考える。このとき、**車輪 2 が水平部の端点から射出されるときの車輪の中心の水平方向の並進速度 v_f'** を求めよ。

同様に、エネルギー保存則を考えるが（2）と異なり、回転の運動エネルギーも考慮する。車輪がもっている（回転の運動エネルギーを含む）運動エネルギー T は次式となる。

（1）で求めた慣性モーメントを代入する。

また、$v = r\omega$ の関係式を用いる。

$$T = \frac{1}{2}Mv_f'{}^2 + \frac{1}{2}I\omega_f{}^2$$

$$= \frac{1}{2}Mv_f'{}^2 + \frac{1}{2}\cdot Mr^2 \cdot \left(\frac{v_f'}{r}\right)^2 = Mv_f'{}^2$$

エネルギー保存則より、位置エネルギーが運動エネルギーに変化する。

$$Mgh = Mv_f'{}^2$$

$$\therefore v_f = \sqrt{gh}$$

（4）図 1-3 のように、十分な長さの糸を巻きつけた車輪 3（糸の端点は車輪の外周上に固定）を摩擦の全くない滑らかな水平の台の上に置き、滑らかな滑車を介して糸のもう一方の端を質量 M のおもりにつなぎ、おもりと車輪がすべて静止しかつ糸が張られた状態から、静かにおもりを離して落下させることを考える。滑車の位置は、糸が車輪 3 を水平方向に引っ張るように調節されているものとする。
このとき、図 1-3 に示す落下するおもりの下向き加速度 a_1 と車輪 3 の中心の水平方向の加速度 a_2 および車輪 3 の角加速度 $\dot{\omega}$ との間の関係式を求めよ。

おもりと車輪 3 の進む距離が等しいことを考える。
おもりが進む距離 x_1 は、
車輪 3 の中心の移動量 x_2 に、糸のほどける長さ（弧の長さ）$r\theta$ を加えた距離であるので、

$$x_1 = x_2 + r\theta$$

これを 2 階微分する。

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 + r\ddot{\theta}$$

ここで、

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \left(\because \omega = \frac{d\theta}{dt}\right)$$

よって、求める関係式は、

$$a_1 = a_2 + r\dot{\omega}$$

（5）問い（4）において、落下するおもりの下向き加速度 a_1 を求めよ。

おもりについて、並進の運動方程式、車輪 3 については並進・回転の運動方程式を立式する。
ここで、糸の張力を T とする。

おもりについて、

$$① \quad Ma_1 = Mg - T \quad \therefore a_1 = g - \frac{T}{M}$$

車輪 3 について、

$$② \quad Ma_2 = T \quad \therefore a_2 = \frac{T}{M}$$

また、回転運動の方程式（$M = I\ddot{\theta}$）は次式となる。

$$③ \quad \frac{1}{2} Mr^2\dot{\omega} = rT \quad \therefore \dot{\omega} = \frac{2T}{Mr}$$

ここで、（1）で求めた慣性モーメントを代入した。

そして（4）の答えより、

$$④ \quad a_2 = a_1 - r\dot{\omega}$$

以上4式より、まずTを求めるため、④式に①,②,③を代入する。

$$\frac{T}{M} = g - \frac{T}{M} - \frac{2T}{M}$$

張力Tは、

$$\therefore T = \frac{Mg}{4}$$

これを①式に代入して、

$$a_1 = \frac{3}{4}g$$

2017（H29）年度【1】略解

（1）	略
（2）	$v_f = \sqrt{2gh}$
（3）	$v_f = \sqrt{gh}$
（4）	$a_1 = a_2 + r\dot{\omega}$
（5）	$a_1 = \frac{3}{4}g$

2017（H29）年度【1】講評

慣性モーメントと回転運動に関しての基本的な知識を問う問題である。
あらかじめ図も用意されており、問題文も非常に丁寧である。(文長いけど)
（1）定義が与えられているので、積分の計算をするだけ。
（2）エネルギー保存則（3）回転の運動エネルギーも含めたエネルギー保存則
（4）に関しては、少し面をくらいそうな問題。
（5）（4）ができたら、運動方程式を立てるだけ。
回転運動の角運動方程式はしっかり立式できるように。
4 式の連立なので、泥沼にはまらないようにしたい。

平成 29 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：機械力学　［3 / 3］

（問題[1], [2]は別々の答案用紙に解答すること.）

[2]　長さ l の一様で均質な棒に，質量 M のおもり，ばね定数 k のばね，および減衰係数 c の減衰器を適当に組み合わせて接続した自由振動系を作製した．以下の問いに答えよ．なお，重力の影響は考慮せず，棒はたわまない，また質量 M のおもりは質点として取り扱うものとする．

(1)　棒の両端にばねと質量 M のおもりを取り付け，点 O でピン支持した図 2-1 に示す回転振動系を構成した．

(a) 棒の質量が無視できる場合の振動周期 T_0 を求めよ．

(b) 棒の質量を m として考慮する場合，棒の重心周りの慣性モーメント I_G，およびこの振動系の慣性モーメント I を M, m, l で示し，その振動周期 T_m を求めよ．

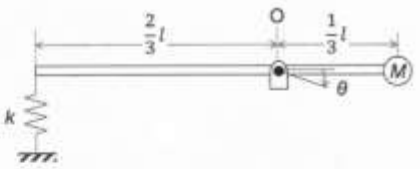


図 2-1

(2)　質量が無視できる棒の両端に減衰器とばねを取り付け，点 P に質量 M のおもりを取り付けた図 2-2 に示す振動系を構成した．この振動系について，回転角 θ を変数とした運動方程式を導出と共に示せ．またその固有角振動数 ω_n，および減衰比 ζ を示せ．

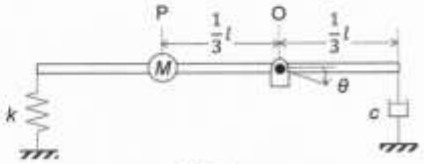


図 2-2

(3)　ばね定数 k の 2 つのばねを棒に接続した図 2-3 に示す振動系を構成した．棒の質量を m，慣性モーメントは I とする．重心の変位 x および棒の回転角 θ を変数とする 2 自由度振動系として以下の問いに答えよ．

(a) この振動系の運動エネルギー T，ポテンシャルエネルギー U，およびラグランジュ関数 L を示せ．

(b) ラグランジュの運動方程式をマトリクス形式で示せ．

(c) この振動系の固有角振動数を求めるための振動数方程式を示せ（解は求めなくても良い）．

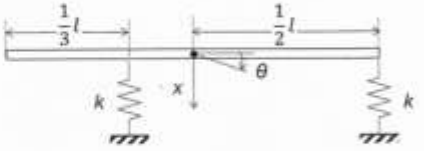


図 2-3

2017（H29）年度【２】問題〈回転振動〉

（１）棒の両端にばねと質量 M のおもりを取り付け、点 O でピン支持した図 2-1 に示す回転振動系を構成した。

（a）棒の質量が無視できる場合の振動周期 T_0 を求めよ。

・質点における慣性モーメント

質量 M の質点が回転軸から距離 r の位置に存在するとき、この質点の慣性モーメントは次式で計算される。

$$I = r^2 \times M$$

今回の慣性モーメント I_a は、

$$I_a = \left(\frac{1}{3}l\right)^2 \times M = \frac{l^2}{9}M$$

系の回転運動の方程式（$M = I\ddot{\theta}$）は次式となる。

$$\frac{l^2}{9}M\ddot{\theta} = -\frac{2}{3}l \cdot k\frac{2}{3}l\sin\theta$$

ここで、先に求めた慣性モーメントを代入した。

また、角 θ は微小と考えてよいので、$\sin\theta \approx \theta$ とみなして、式を整理する。

$$\ddot{\theta} + \frac{4k}{M}\theta = 0$$

よって、固有角振動数 ω_n は、

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4k}{M}}$$

したがって、周期 T_0 は、

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_n} = \pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

周期「上からマリコ」は常識。

(b) 棒の質量を m として考慮する場合、棒の重心周りの慣性モーメント I_G, および
この振動系の慣性モーメント I を M, m, l で示し、その振動周期 T_m を求めよ。

【慣性モーメントの定義】

剛体のある軸回りの慣性モーメント I は、剛体を構成する微小部分の質量を dm とし、軸とその微小部分との距離を r とすると、次式で定義される。

$$I = \int r^2 \, dm$$

★ 平行軸の定理

重心を通る z 軸に関する慣性モーメントを I_G　z' 軸に関する慣性モーメントを $I_{z'}$
z' 軸から z 軸の距離を e　物体の質量を M とすると、

$$I_{z'} = I_G + e^2 M$$

棒の重心周りの慣性モーメント I_G を求める。

線密度は m/l, 長さは dx ゆえ、

$$I_G = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{2m}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{2m}{l} \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{ml^2}{12}$$

また、平行軸の定理より、

$$I_O = I_G + \left(\frac{2}{3}l - \frac{1}{2}l\right)^2 m = I_G + \frac{ml^2}{36}$$

よって、I_G を代入して、

$$I_O = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{36} = \frac{ml^2}{9}$$

(a) で求めた質点の慣性モーメント I_a と合わせて、

$$I = I_O + I_a = \frac{(M+m)l^2}{9}$$

周期 T_m は (a) より、

$$T_m = \pi \sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

周期「上からマリコ」は常識。

（２）質量が無視できる棒の両端に減衰器とばねを取り付け、
点Ｐに質量 M のおもりを取り付けた図 2-2 に示す振動系を構成した。
この振動系について回転角 θ を変数とした運動方程式を導出と共に示せ。
またその固有角振動数 ω_n , および減衰比 ζ を示せ。

系の回転運動の方程式（$M = I\ddot{\theta}$）は次式となる。

$$\frac{l^2}{9}M\ddot{\theta} = -\frac{2}{3}l \cdot k\frac{2}{3}l\sin\theta - \frac{1}{3}l \cdot c\frac{1}{3}(l\dot{\sin}\theta)$$

ここで、(a) で求めた慣性モーメントを代入した。

また、角 θ は微小と考えてよいので、$\sin\theta \approx \theta$ とみなして、式を整理する。

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{M}\dot{\theta} + \frac{4k}{M}\theta = 0$$

よって、固有角振動数 ω_n は、

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4k}{M}} \quad \therefore \omega_n = 2\sqrt{\frac{k}{M}}$$

また、減衰比 ζ は、$2\zeta\omega_n = c/M$ より、

$$\zeta = \frac{c}{2M\omega_n} = \frac{c}{4M}\sqrt{\frac{M}{k}} \quad \therefore \zeta = \frac{c}{4\sqrt{Mk}}$$

（３）ばね定数 k の２つのばねを棒に接続した図 2-3 に示す振動系を構成した。
棒の質量を m, 慣性モーメントを I とする。重心の変位 x および棒の回転角 θ を変数とする２自由度振動系として以下の問いに答えよ。

(a) この振動系の運動エネルギー T, ポテンシャルエネルギー U,
およびラグランジュ関数 L を示せ。

・運動エネルギー T

（回転の運動エネルギーを含む）運動エネルギー T は次式となる。

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

・ポテンシャルエネルギー U

左側のばねの縮みは、$x - l\sin\theta/6$,　右側のばねの縮みは、$x + l\sin\theta/2$

また、角 θ は微小と考えてよいので、$\sin\theta \approx \theta$ とみなして、

$$U = \frac{1}{2}k\left(x - \frac{1}{6}l\theta\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(x + \frac{1}{2}l\theta\right)^2$$

・ラグラジアン $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k\left(x - \frac{1}{6}l\theta\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(x + \frac{1}{2}l\theta\right)^2$$

(b) ラグランジュの運動方程式をマトリクス形式で示せ。

（2）で求めたラグラジアンを用いて、並進・回転の運動方程式を求める。

・並進の運動方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + k\left(x - \frac{1}{6}l\theta\right) + k\left(x + \frac{1}{2}l\theta\right) = 0$$

$$\therefore m\ddot{x} + 2kx + \frac{1}{3}kl\theta = 0$$

・回転の運動方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(I\dot{\theta}) - \frac{1}{6}lk\left(x - \frac{1}{6}l\theta\right) + \frac{1}{2}lk\left(x + \frac{1}{2}l\theta\right) = 0$$

$$\therefore I\ddot{\theta} + \frac{1}{3}klx + \frac{5}{18}kl^2\theta = 0$$

・マトリクス形式

$$\therefore \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k & \frac{1}{3}kl \\ \frac{1}{3}kl & \frac{5}{18}kl^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

（c）この振動系の固有角振動数を求めるための振動数方程式を示せ。
（解は求めなくていい）

この振動系の解を、

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ \Theta \end{pmatrix} \cos \omega t$$

と仮定し、（b）で求めた式に代入する。

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 m & 0 \\ 0 & -\omega^2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \Theta \end{pmatrix} \cos \omega t + \begin{pmatrix} 2k & \frac{1}{3}kl \\ \frac{1}{3}kl & \frac{5}{18}kl^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \Theta \end{pmatrix} \cos \omega t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを整理する。

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 m + 2k & \frac{1}{3}kl \\ \frac{1}{3}kl & -\omega^2 I + \frac{5}{18}kl^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

固有角振動数は、上式の係数マトリックスをゼロとする ω で与えられるので、
振動数方程式は次式となる。

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 m + 2k & \frac{1}{3}kl \\ \frac{1}{3}kl & -\omega^2 I + \frac{5}{18}kl^2 \end{vmatrix} = 0$$

よって、行列式を計算して、

$$(-\omega^2 m + 2k)\left(-\omega^2 I + \frac{5}{18}kl^2\right) - \frac{1}{9}k^2 l^2 = 0$$

$$mI\omega^4 - \frac{5}{18}mkl^2\omega^2 - 2kI\omega^2 + \frac{5}{9}k^2 l^2 - \frac{1}{9}k^2 l^2 = 0$$

両辺 18 倍して、

$$\therefore 18mI\omega^4 - (5mkl^2 + 36kI)\omega^2 + 8k^2 l^2 = 0$$

2017（H29）年度【２】略解

（１）	
(a)	$T_0 = \pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$
(b)	$I_G = \dfrac{ml^2}{12}, \quad I = \dfrac{(M+m)l^2}{9}, \quad T_m = \pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$
（２）	$\omega_n = 2\sqrt{\dfrac{k}{M}}, \quad \zeta = \dfrac{c}{4\sqrt{Mk}}$
（３）	
(a)	$T = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2, \quad U = \dfrac{1}{2}k\left(x - \dfrac{1}{6}l\theta\right)^2 + \dfrac{1}{2}k\left(x + \dfrac{1}{2}l\theta\right)^2$ $L = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \dfrac{1}{2}k\left(x - \dfrac{1}{6}l\theta\right)^2 - \dfrac{1}{2}k\left(x + \dfrac{1}{2}l\theta\right)^2$
(b)	$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k & \dfrac{1}{3}kl \\ \dfrac{1}{3}kl & \dfrac{5}{18}kl^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
(c)	$18mI\omega^4 - (5mkl^2 + 36kI)\omega^2 + 8k^2l^2 = 0$

2017（H29）年度【２】講評

（１）回転振動系

（a）慣性モーメント、角運動方程式、線形化、固有角振動数、周期。てんこ盛り。

（b）平行軸の定理を知っておく。

（２）減衰項を考慮する。

（３）ラグランジュの運動方程式。行列形式で書く。振動数方程式。

マトリックス形式には慣れておきたい。

回転振動系の変位は 2019【２】を参照。今回は、下方に x だけ平行移動して、その後 θ 回転したと考え、ばねの伸び・縮みを求めた。