平成 30 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：機械力学　［1 / 3］

（問題 [1]，[2]は別々の答案用紙に解答すること．）

[1] 剛体の平面運動に関する以下の問に答えよ．なお，重力および摩擦の影響は無視できるものとする．また，太字はベクトルを表し，変数上部のドット記号(・)は時刻 t による微分を示す．

(1) 長さ L，質量 m で太さの無視できる一様な剛体棒を剛体 1 とし，その重心を点 P_G とする．このとき，点 P_G 周りの剛体 1 の慣性モーメント I_1 を求めよ．ただし，平面運動において，ある点 P 周りの剛体の慣性モーメント I は，剛体の微小要素の質量を dm，点 P と微小要素との距離を r としたとき，次式で与えられる．

$$I = \int r^2 dm$$

(2) 原点を O とする静止直交座標系 S(O, x, y)において，剛体1の棒の長手方向と x 軸とのなす角を θ（反時計回りを正）とする（図1–1）：時刻 $t = 0$ において，剛体 1 の重心の点 P_G は点 O 上にあり，$\theta = 0$ として静止した状態とする．
ここで，図 1-2 に示すように，点 P_G から $+x$ 方向への距離 $L/2$ の点 P_a(棒の右端)で剛体 1 に力 $\boldsymbol{F}$ を与えた場合の運動を考える．時刻 t における点 P_G の速度を $\boldsymbol{v}$ としたとき，点 P_G の運動方程式について，$\boldsymbol{F}$ および $\boldsymbol{v}$ を用いて示せ．また，角速度を $\omega = \dot{\theta}$，力 $\boldsymbol{F}$ の x および y 方向成分をそれぞれ F_x, F_y としたとき，重心周りの回転の運動方程式について，ω および I_1 を用いて示せ．

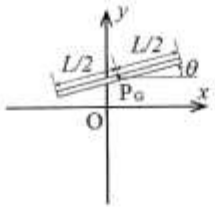


図 1-1

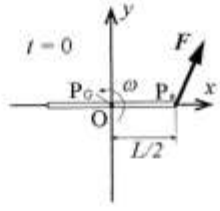


図 1-2

2018（H30）年度【1】問題〈回転運動〉

【1】剛体の平面運動に関する以下の問に答えよ。

（1）長さ L,質量 m で太さの無視できる一様な剛体棒を剛体 1 とし、その重心を点 P_0 とする。このとき、点 P_G 周りの剛体 1 の慣性モーメント I_1 を求めよ。

【慣性モーメントの定義】

剛体のある軸回りの慣性モーメント I は、剛体を構成する微小部分の質量を dm とし、軸とその微小部分との距離を r とすると、次式で定義される。

$$I = \int r^2\, dm$$

棒の重心周りの慣性モーメント I_G を求める。

剛体棒は一様ゆえ、線密度は m/l, 長さは dx ゆえ、

$$I_G = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 \frac{m}{l} dr = \frac{2m}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} r^2 dr = \frac{2m}{l}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{ml^2}{12}$$

（2）ここで、図 1-2 に示すように、点 P_G から $+x$ 方向への距離 $L/2$ の点 P_a（棒の右端）で剛体 1 に力 $\boldsymbol{F}$ を与えた場合の運動を考える。

時刻 t における点 P_G の速度を $\boldsymbol{v}$ としたとき、

点 P_G の運動方程式について、$\boldsymbol{F}$ および $\boldsymbol{v}$ を用いて示せ。

また角速度を $\omega = \dot{\theta}$, 力 F の x および y 方向成分をそれぞれ F_x , F_y としたとき、

重心周りの回転の運動方程式について、ω および I_1 を用いて示せ。

・点 P_G の運動方程式（並進の運動方程式）

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}$$

・重心周りの回転の運動方程式（$M = I\ddot{\theta}$）

$$I_1\dot{\omega} = -\frac{L}{2}F_x \sin\theta + \frac{L}{2}F_y \cos\theta$$

(3) 次に，問(2)において，剛体 1 に撃力$\boldsymbol{J}$を加えた場合の運動を考える（図1–3）．微小な時間Δt において物体に力 $\boldsymbol{F}$ が作用したとき，撃力$\boldsymbol{J}$は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{J} = \int_{t}^{t+\Delta t} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t$$

ここで，剛体 1 に対し，点 P_a において x 方向成分を 0，y 方向成分をJ_y とする撃力を加えた場合の運動を考える．このときの時刻 t における点 P_G について，座標を(x_1, y_1)とし，速度 v_1 の x および y 方向への速度成分をそれぞれ$\dot{x}_1$，$\dot{y}_1$とする．運動方程式より，$\dot{x}_1$および $\dot{y}_1$を求め，J_y を用いて示せ．また，このときの剛体 1 の重心周りの角速度ω_1について，I_1 およびJ_y を用いて示せ．

(4) 問(3)について，時刻 t における点 $P_G(x_1, y_1)$，および点 $P_a(x_2, y_2)$の座標を求め，$\dot{x}_1$，$\dot{y}_1$およびω_1を用いて示せ．

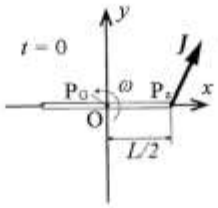


図 1-3

（３）次に、問（２）において、剛体１に撃力 $\boldsymbol{J}$ を加えた場合の運動を考える（図 1-3)。

微小な時間 Δt において物体に力 $\boldsymbol{F}$ が作用したとき、撃力 $\boldsymbol{J}$ は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{J} = \int_{t}^{t+\Delta t} \boldsymbol{F}\, dt$$

ここで、剛体１に対し、点 P_a において x 方向成分を 0, y 方向成分を J_y とする撃力を加えた場合の運動を考える。このときの時刻 t における点 P_G について、座標を (x_1, y_1) とし、速度 $\boldsymbol{v_1}$ の x および y 方向への速度成分をそれぞれ $\dot{x}_1, \dot{y}_1$ とする。運動方程式より、$\dot{x}_1$ および $\dot{y}_1$ を求め、J_y を用いて示せ。また、このときの剛体１の重心周りの角速度 ω_1 について、I_1 および J_y を用いて示せ。

並進・回転の運動方程式をそれぞれ立式したのち、時間で積分する。

ここで、注意したいのは時刻 t における点 P_G を考えるというとき、

与えられた式において、$t = 0,\ t + \Delta t = \Delta t$ と解釈して撃力を求めるということである。

（初期時から Δt 経った時刻が t ということ。）

・点 P_G の運動方程式（並進の運動方程式 $m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}$）

・x 方向

$$m\ddot{x}_1 = 0$$

$$m\int_0^{\Delta t} \ddot{x}_1\, dt = \int_0^{\Delta t} F_x\, dt = 0$$

$$\therefore m\{\dot{x}_1(\Delta t) - \dot{x}_1(0)\} = 0$$

初期条件 $\dot{x}_1(0) = 0$ より、

$$\therefore \dot{x}_1 = 0$$

・y 方向

$$m\ddot{y}_1 = F_y$$

$$m\int_0^{\Delta t} \ddot{y}_1\, dt = \int_0^{\Delta t} F_y\, dt = J_y$$

$$\therefore m\{\dot{y}_1(\Delta t) - \dot{y}_1(0)\} = J_y$$

初期条件 $\dot{y}_1(0) = 0$ より、

$$\therefore \dot{y}_1 = \frac{J_y}{m}$$

・重心周りの回転の運動方程式（$M = I\ddot{\theta}$）

$$I_1\dot{\omega}_1 = -\frac{L}{2}F_x \sin\theta + \frac{L}{2}F_y \cos\theta$$

$$I_1\int_0^{\Delta t}\dot{\omega}_1\, dt = -\frac{L}{2}\int_0^{\Delta t}F_x \sin\theta\ dt + \frac{L}{2}\int_0^{\Delta t}F_y \cos\theta\ dt$$

微小な時間 Δt において、

角 θ は微小と考えてよいので、$\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$ とみなし、式を整理する。

$$I_1\int_0^{\Delta t}\dot{\omega}_1\, dt = -\frac{L}{2}\theta\int_0^{\Delta t}F_x\, dt + \frac{L}{2}\int_0^{\Delta t}F_y\, dt$$

よって、

$$\therefore I_1\{\omega_1(\Delta t) - \omega_1(0)\} = \frac{L}{2}J_y$$

初期条件 $\omega_1(0) = 0$ より、

$$\therefore \dot{\omega}_1 = \frac{LJ_y}{2I_1}$$

【う～ん、どうなんやろ解答】

$$m\dot{x}_1 = 0, \quad m\dot{y}_1 = J_y, \quad I_1\dot{\omega}_1 = \frac{L}{2}J_y$$

結局、運動量保存則より、上３式のように立式してしまえばいいわけだが、

わざわざ撃力の定義を載せているのに、断りもなく立式しては、よろしくないだろう。

ここで、上手い断りがあるなら教えていただきたい。

（４）問（３）について、時刻 t における点 $P_G\,(x_1, y_1)$, および点 $P_a\,(x_2, y_2)$ の座標を求め、$\dot{x}_1, \dot{y}_1$ および ω_1 を用いて示せ。

（３）で速度を求めたので、時間で積分して、まず時刻 t における点 P_G の位置を求める。

撃力を加えたあとの話なので、Δt から t を考える。

$$\int_{t=\Delta t}^{t=t} \dot{x}_1 \, dt = 0$$

$$x_1(t) - x_1(\Delta t) = 0$$

撃力は瞬間的ゆえ、初期位置と変わらない。$x_1(\Delta t) = 0$

$$\therefore x_1(t) = 0$$

$$\int_{t=\Delta t}^{t=t} \dot{y}_1 \, dt = \int_{t=\Delta t}^{t=t} \frac{J_y}{m} \, dt$$

$$y_1(t) - y_1(\Delta t) = \frac{J_y}{m}(t - \Delta t)$$

撃力は瞬間的ゆえ、初期位置と変わらない。$y_1(\Delta t) = 0$

$$\therefore y_1(t) = \frac{J_y}{m}(t - \Delta t) = \dot{y}_1(t - \Delta t)$$

次に、点 $P_a\,(x_2, y_2)$ の座標を求めるために、 t までに回転する角度 $\theta(t)$ を求めると、

$$\theta(t) = \theta(\Delta t) + \omega_1(t - \Delta t)$$

撃力は瞬間的ゆえ、初期位置と変わらない。$\theta(\Delta t) = 0$

$$\therefore \theta(t) = \omega_1(t - \Delta t)$$

よって、

$$x_2(t) = x_1(t) + \frac{L}{2}\cos\theta(t) = \frac{L}{2}\cos\omega_1(t - \Delta t)$$

$$y_2(t) = y_1(t) + \frac{L}{2}\sin\theta(t) = \dot{y}_1(t - \Delta t) + \frac{L}{2}\sin\omega_1(t - \Delta t)$$

2018（H30）年度【1】略解

（1）	$I_G = \dfrac{ml^2}{12}$
（2）	$m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}$ $I_1\dot{\omega} = -\dfrac{L}{2}F_x \sin\theta + \dfrac{L}{2}F_y \cos\theta$
（3）	$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{y}_1 = \dfrac{J_y}{m}$ $\dot{\omega}_1 = \dfrac{LJ_y}{2I_1}$
（4）	$x_1 = 0, \quad y_1 = \dot{y}_1(t - \Delta t)$ $x_2 = \dfrac{L}{2}\cos\omega_1(t - \Delta t), \quad y_2 = \dot{y}_1(t - \Delta t) + \dfrac{L}{2}\sin\omega_1(t - \Delta t)$

2018（H30）年度【1】講評

慣性モーメントと回転運動に関しての基本的な知識を問う問題である。
あらかじめ図も用意されており、問題文も非常に丁寧である。（文長いけど）
（1）定義が与えられているので、積分の計算をするだけ。
（2）分解を正確に。モーメントの問題では、うでの分解をする方が楽なことが多い。
（3）運動方程式を立てるだけ。
　　撃力という用語に関しての理解がないと、手が止まってしまいそう。
　　特に理解せず運動方程式を立てても、差し支えなさそうではあるが。
　　回転運動の角運動方程式はしっかり立式できるように。
（4）積分するだけ。頭の中がまとまってないとくそややこしく感じてしまう。
　　要するに、撃力を加える時間は瞬間的なものだから、初期時刻と撃力の加え終わりの時刻は一緒だと考えて差し支えないということなのだが。

平成 30 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：機械力学　［3 / 3］

（問題 [1]，[2] は別々の答案用紙に解答すること．）

[2]　図 2-1 は，ある振動系に加振力 $f = F\sin\omega t$ が作用したときの周波数応答である．回答には以下の記号を用いよ．

質量：m，剛性：k，粘性減衰係数：c，変位：x，
振動振幅：X，静変位：X_{st}，固有角振動数：ω_n，減衰比：ζ
変位応答倍率：$M_d = \dfrac{X}{X_{st}}$

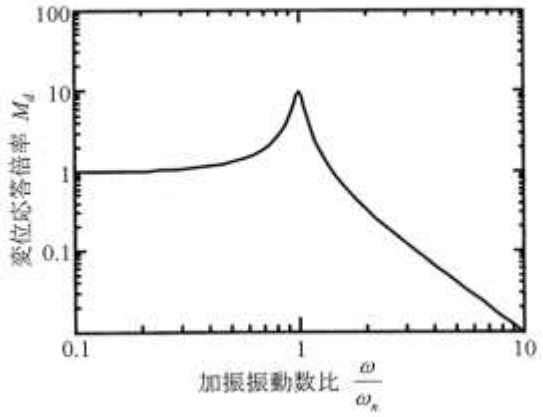


図 2-1　周波数応答

(1) 図 2-1 のような周波数応答になる振動系の運動方程式を示せ（ただし，右辺を $F\sin\omega t$ とする）．

(2) その運動方程式から系の定常応答を求め，定常応答の振動振幅 X を固有角振動数 $\omega_n = \sqrt{k/m}$，減衰比 $\zeta = c/2\sqrt{mk}$，静変位 $X_{st} = F/k$ を使って表せ．

(3) 図 2-1 の周波数応答を示す振動系について，減衰比 ζ を 0 としたときと 1 としたときの変位応答倍率 M_d の最大値を求めよ．また，それぞれの場合の周波数応答を，加振振動数比 ω/ω_n を横軸，変位応答倍率 M_d を縦軸として描け．

2018（H30）年度【２】問題〈強制振動〉

【２】図 2-1 は、ある振動系に加振力 $f = F\sin\omega t$ が作用した時の周波数応答である。

（１）図 2-1 のような周波数応答になる振動系の運動方程式を示せ。
（ただし、右辺を $F\sin\omega t$ とする）

運動方程式は、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F\sin\omega t$$

（２）その運動方程式から系の定常応答を求め、定常応答の振動振幅 X を
固有角振動数 $\omega_n = \sqrt{k/m}$，減衰比 $\zeta = c/2\sqrt{mk}$，静変位 $X_{st} = F/k$ を使って表せ。

（１）で求めた運動方程式（非同次微分方程式）の特解 z を $z = Ce^{i\omega t}$ とおき代入する。

ここで、強制振動の定常応答はこの特解 z の実部である。**計算の簡易化には複素化！**

ここで、$F\sin\omega t = \mathrm{Im}\left[Fe^{i\omega t}\right]$ であることに注意する。

$$-m\omega^2 Ce^{i\omega t} + i\omega cCe^{i\omega t} + kCe^{i\omega t} = Fe^{i\omega t}$$

固有角振動数 $\omega_n = \sqrt{k/m}$，減衰比 $\zeta = c/2\sqrt{mk}$ を用いて式を整理する。

$$\left(-\omega^2 + \frac{c}{m}i\omega + \frac{k}{m}\right)Ce^{i\omega t} = \frac{F}{m}e^{i\omega t}$$

$$(-\omega^2 + 2\zeta\omega_n i\omega + {\omega_n}^2)C = \frac{F}{m}$$

$$\therefore C = \frac{1}{({\omega_n}^2 - \omega^2) + i\cdot 2\zeta\omega_n\omega}\cdot\frac{F}{m}$$

定常応答の振動振幅 X は、

$$X = |C| = \frac{F/m}{\sqrt{({\omega_n}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}$$

ここで、

$$\frac{F}{m} = \frac{F}{k}\cdot\frac{k}{m} = X_{st}\cdot{\omega_n}^2$$

よって、これを代入して、

$$\therefore X = \frac{{\omega_n}^2}{\sqrt{({\omega_n}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}X_{st}$$

（3）図 2-1 の周波数応答を示す振動系について、減衰比 ζ を 0 としたときと 1 としたときの変位応答倍率 M_d の最大値を求めよ。
また、それぞれの場合の周波数応答を、加振振動数比 ω/ω_n を横軸、変位応答倍率 M_d を縦軸として描け。

変位応答倍率 M_d は、（2）の結果より、${\omega_n}^2$ で右辺の分母・分子を除する。

$$M_d = \frac{X}{X_{st}} = \frac{{\omega_n}^2}{\sqrt{({\omega_n}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left\{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right\}^2}}$$

・減衰比 $\zeta = 0$ のとき、

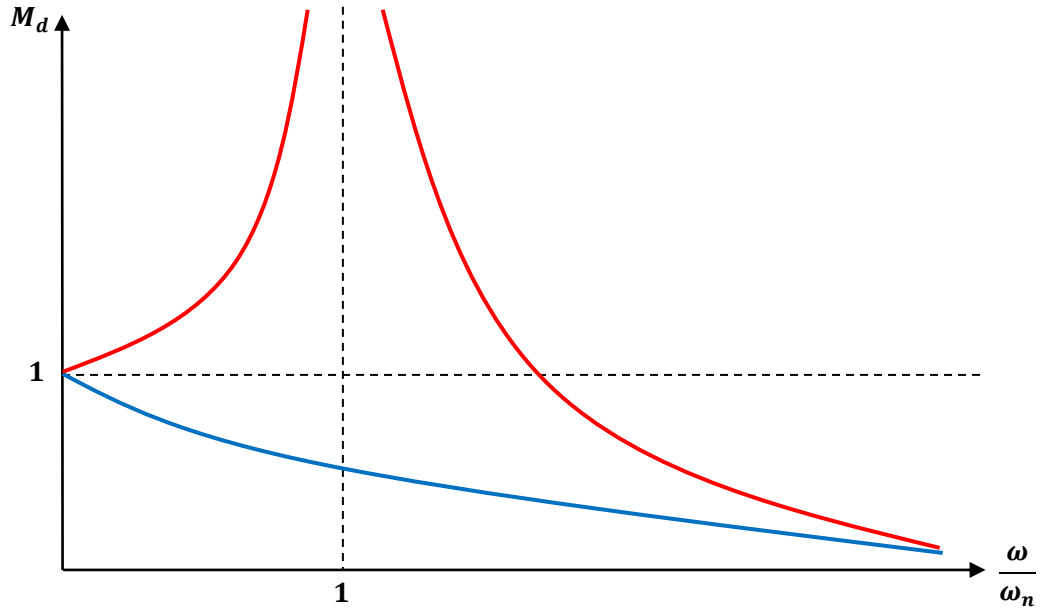
$$M_d = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

分母がゼロのとき、最大となるので、最大値は $+\infty$ である。

・減衰比 $\zeta = 1$ のとき、

$$M_d = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \left\{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

分母が 1 のとき、最大となるので、最大値は 1 である。



2018（H30）年度【２】略解

（１）	$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F\sin\omega t$
（２）	$X=\frac{{\omega_n}^2}{\sqrt{({\omega_n}^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}X_{st}$
（３）	略

2018（H30）年度【２】講評

（１）強制振動の運動方程式。

（２）強制振動は複素解析が見通しがいい。

（３）周波数応答曲線（共振曲線）は頻出のテーマであるため、押さえておく。