平成 31 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：機械力学　［ 1 / 2 ］

（問題 [1]，[2]は別々の答案用紙に解答すること．）

[1]　鉛直 2 次元平面内における剛体の運動について，以下の問に答えよ．

(1) 半径 R，質量 M の一様な円板がある．この円板について，摩擦のある傾斜角 ϕ の斜面上で静止させた状態から，円板の中心まわりに一定のトルク T を与え続けた時の運動を考える．なお，以下の問において，並進運動は斜面との平行成分のみを扱い，右向きを正とする．また，回転運動は時計回りを正とする．

円板の中心における並進運動の速度を v，中心を通る軸のまわりの回転運動の角速度を ω，時刻を t とするとき，並進運動，および回転運動の運動方程式をそれぞれ示せ．ただし，円板の中心まわりの慣性モーメントを I，円板に働く摩擦力を f(斜面に平行かつ右向きを正)，重力加速度を g とする(図1-1)．

(2) 問(1)において，円板が斜面上を滑らずに転がり上る運動を考える．このとき，円板には静止摩擦が働いており，摩擦によるエネルギーの損失は生じないものとする．この束縛条件より，並進運動の速度 v を求めよ．また，$v > 0$ を満たすための トルク T の条件を M, g, ϕ および R を用いて示せ．ただし，$I=MR^2/2$ とする．

(3) 問(2)において，運動開始前を基準とし，円板の中心の高さが h_0 に達した時点でトルク T を停止した．このときの円板と斜面との接触点を点 A とする．トルク停止後，円板は中心の高さが $h_0 + h_1$ に達するまで斜面を上ったのち，下降を始めた(図1-2)．トルク停止直後の円板の中心における並進運動の速度を v_0 とするとき，h_1 を求め，v_0 および g を用いて示せ．

(4) 問(3)において，点 A より高い領域において斜面がなめらかであり，円板と斜面との間に摩擦が生じない場合を考える．トルク停止後に円板は斜面を上り，中心の高さが $h_0 + h_2$ まで達したのち，下降を始めた(図 1-3)．このとき，h_2 を求め，v_0 および g を用いて示せ．また，h_1 と h_2 の大小関係を示せ．

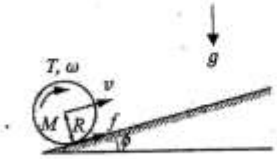


図 1-1

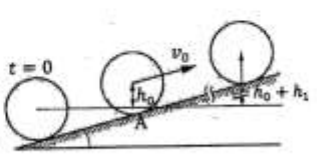


図 1-2

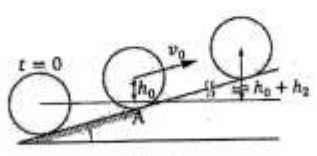


図 1-3

2019（H31）年度【１】問題〈回転運動〉

（１）円板の中心における並進運動の速度を v , 中心を通る軸のまわりの回転運動の角速度を ω , 時刻を t とするとき、並進運動、および回転運動の運動方程式をそれぞれ示せ。ただし、円板の中心まわりの慣性モーメントを I , 円板に働く摩擦力を f （斜面に平行かつ右向きを正），重力加速度を g とする。（図 1-1）

並進運動の方程式（$F = m\ddot{x}$）は次式となる。

$$① \quad M\ddot{x} = f - Mg\sin\phi$$

ここで、

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \left(\because v = \frac{dx}{dt}\right)$$

よって、

$$\therefore M\frac{dv}{dt} = f - Mg\sin\phi$$

回転運動の方程式（$M = I\ddot{\theta}$）は次式となる。

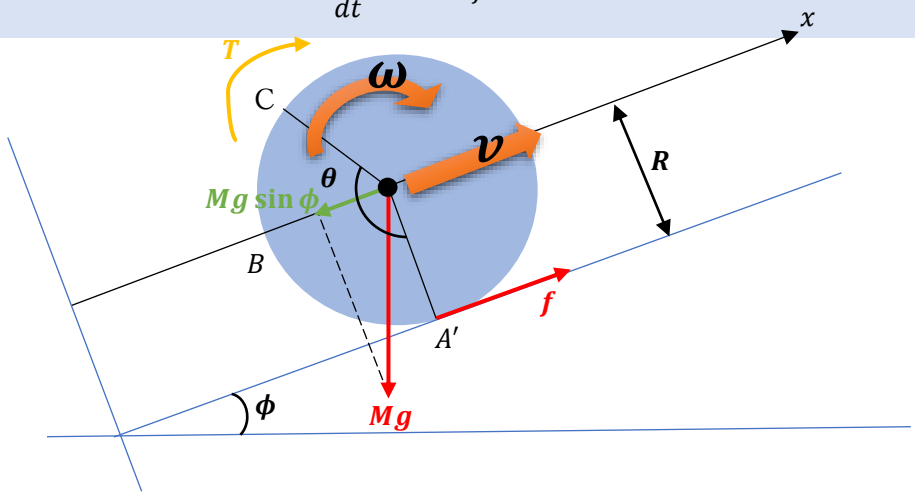
$$② \quad I\ddot{\theta} = T - Rf$$

ここで、

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} \left(\because \omega = \frac{d\theta}{dt}\right)$$

よって、

$$\therefore I\frac{d\omega}{dt} = T - Rf$$



（2）問（1）において、円板が斜面上を滑らずに転がり上る運動を考える。このとき、円板には静止摩擦が働いており、摩擦によるエネルギーの損失は生じないものとする。この束縛条件より、並進運動の速度 v を求めよ。また、$v > 0$ を満たすためのトルク T の条件を M, g, ϕ および、R を用いて示せ。ただし、$I = MR^2/2$ とする。

図より、

$$x = \widehat{A'BC} = R\theta$$

$$③ \quad \ddot{x} = R\ddot{\theta}\ (a = r\omega^2), \qquad \therefore \ddot{\theta} = \frac{1}{R}\ddot{x}$$

③を②に代入する。

$$④ \quad \frac{I}{R}\ddot{x} = T - Rf$$

④を f について整理すると、

$$⑤ \quad f = \frac{T}{R} - \frac{I}{R^2}\ddot{x}$$

⑤を①に代入して、整理する。

$$M\ddot{x} = \left(\frac{T}{R} - \frac{I}{R^2}\ddot{x}\right) - Mg\sin\phi$$

$$\left(M + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{x} = \frac{T}{R} - Mg\sin\phi$$

$$\left(\frac{R^2M + I}{R^2}\right)\ddot{x} = \frac{T - RMg\sin\phi}{R}$$

$$⑥ \quad \therefore \ddot{x} = \frac{(T - RMg\sin\phi)R}{R^2M + I}$$

⑥を⑤に代入すると、f が求まる。（本題では求める必要はない。）

$$f = \frac{T}{R} - \frac{I}{R} \cdot \frac{T - RMg\sin\phi}{R^2M + I}$$

⑥で求めた $\ddot{x}$ を積分して、速度 $v\ (= \dot{x})$ を求める。C を積分定数として、

$$\dot{x} = \frac{(T - RMg\sin\phi)R}{R^2M + I} \cdot t + C$$

題意より、$t=0$ のとき、$v\,(=\dot{x})=0$ である。この[初期条件]より、$\therefore C=0$

よって、速度 v は次式になる。

$$v\ =\dot{x}=\frac{(T-RMg\sin\phi)R}{R^2M+I}\cdot t$$

ここで、$I=MR^2/2$ より、

$$\text{⑦}\quad v=\frac{(T-RMg\sin\phi)R}{R^2M+MR^2/2}\cdot t=\frac{2(T-RMg\sin\phi)}{3MR}\cdot t$$

これが $v>0$ となるトルク T についての条件は、

$$\therefore T>RMg\sin\phi$$

（３）問（２）において、運動開始前を基準とし、円板の中心の高さが h_0 に達した時点でトルク T を停止した。このときの円板と斜面との接触点を点 A とする。
トルク停止後、円板は中心の高さが h_0+h_1 に達するまで斜面を上ったのち、下降を始めた（図 1-2）。トルク停止直後の円板の中心における並進運動の速度を v_0 とするとき、h_1 を求め、v_0 および g を用いて示せ。

③より、$\dot{x}=R\dot{\theta}\ (v=r\omega)$,

$$\therefore v=R\omega$$

つまり、速度が v_0 のときは、角速度 ω_0 は次式となる。

$$\omega_0=\frac{1}{R}v_0$$

円板がもっている（回転の運動エネルギーを含む）運動エネルギー T_0 は次式となる。

$$T_0=\frac{1}{2}M{v_0}^2+\frac{1}{2}I{\omega_0}^2=\frac{1}{2}M{v_0}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{MR^2}{2}\cdot\left(\frac{v_0}{R}\right)^2=\frac{1}{2}M{v_0}^2+\frac{M}{4}{v_0}^2=\frac{3M}{4}{v_0}^2$$

円板の中心が、h_1 だけ上昇した場合、位置エネルギーが $U_0(=Mgh_1)$ だけ増える。
運動エネルギー T_0 は位置エネルギー U_0 に一致するから、

$$\frac{3M}{4}{v_0}^2=Mgh_1$$

$$\therefore h_1=\frac{3}{4}\frac{{v_0}^2}{g}$$

（４）問（３）において、点 A より高い領域において斜面がなめらかであり、円板と斜面との間に摩擦が生じない場合を考える。トルク停止後に円板は斜面を上り、中心の高さが $h_0 + h_2$ まで達したのち、下降を始めた（図 1-3)。このとき、h_2 を求め、v_0 および g を用いて示せ。また、h_1 と h_2 の大小関係を示せ。

円板と斜面との間に摩擦が存在しない場合は、円板は点 A を超えた後も、ω_0 の角速度を維持して回転を継続するので、円板の回転の運動エネルギーは円板の上昇には寄与しない。

問（４）の題意では、点 A での運動エネルギーは、円板の最高到達点での
円板の回転の運動エネルギーと位置エネルギーの和のエネルギーに一致するから、

$$\frac{1}{2}M{v_0}^2 + \frac{1}{2}I{\omega_0}^2 = \frac{1}{2}I{\omega_0}^2 + Mgh_2$$

$$\therefore h_2 = \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{g}$$

（３）で求めた値と比較すると、h_1 と h_2 の大小関係は、

$$\therefore h_2 < h_1$$

2019（H31）年度【1】略解

（1）	$M\frac{dv}{dt} = f - Mg\sin\phi$ $I\frac{d\omega}{dt} = T - Rf$
（2）	$T > RMg\sin\phi$
（3）	$h_1 = \frac{3}{4}\frac{{v_0}^2}{g}$
（4）	$h_2 = \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{g}$ $h_2 < h_1$

2019（H31）年度【1】講評

回転運動に関しての基本的な知識を問う問題である。問題設定が複雑であるように感じられるが、あらかじめ図も用意されており、問題文から、正確に状況がイメージできれば、大した問題ではない。（まあ、それが一番難しいのだが。）

（1）並進運動の運動方程式は問題ないだろうが、回転運動の運動方程式にも慣れておく。

（2）並進運動と回転運動を結びつける $(a = r\omega^2)$, $(v = r\omega)$ の 2 式を使うことができるかどうかを問うているにすぎない。

（3）（4）

よくあるエネルギー保存則を適用するタイプの問題だが、

摩擦の取り扱いと回転運動のエネルギーの考慮に注意する必要がある。

平成 31 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：機械力学　［ 2 / 2 ］

（問題 [1]，[2] は別々の答案用紙に解答すること．）

[2]　図 2-1 は，質量 M，重心回りの慣性モーメント I の剛体はりである．はりは，重心から距離 L_1 と L_2 の位置でそれぞればね定数 k_1 と k_2 のばねで支持されている．はりの回転角度を θ（反時計回りが正），重心の上下方向の変位を x（上向きが正）とする．このはりについて以下の問いに答えよ．ただし，回転角度 θ は微小であり，$\sin\theta \fallingdotseq \theta$，$\cos\theta \fallingdotseq 1$ で近似できるものとする．

(1) 図 2-1 の 2 自由度振動系の自由振動を表す運動方程式を示せ．

(2) 重心回りの回転運動と重心の上下方向の運動が非連成（二つの振動モード間の相互作用がない状態）になる条件を示せ．

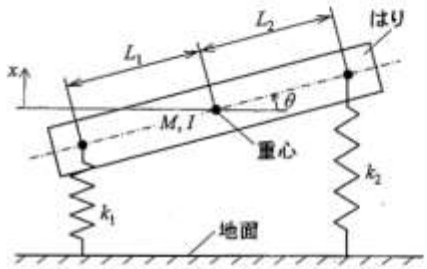


図2-1　2自由度振動系

(3) (2)で示した状態において，はりの重心に質量 m のおもりがばね定数 k_3 のばねと粘性係数 c のダンパを介して結合されたものとする（図 2-2）．地面が $x_0 = X\sin\omega t$ で上下に振動するとき，はりの重心の上下方向の運動とおもりの上下方向の運動を表す運動方程式を示せ．

(4) (3)で示した状態において，粘性係数 c を 0 としたとき，はりの変位 x の振幅が 0 となる条件を示せ．

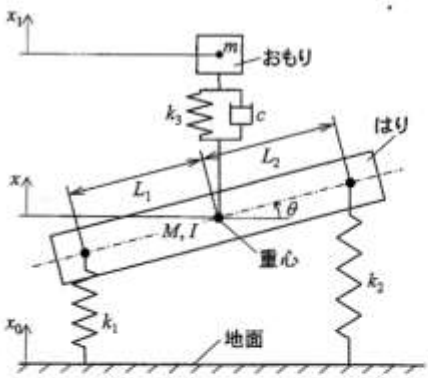
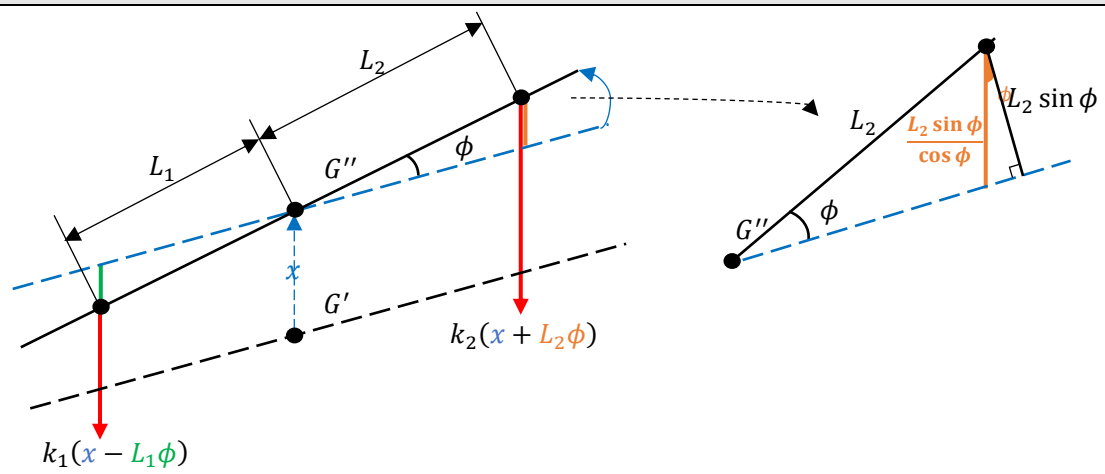


図2-2　3自由度振動系

(5) 以下の 5 つの単語の英訳を示せ．
・運動方程式　・固有振動数　・振動　・変位　・自由度

2019（H31）年度【２】問題〈回転振動〉

（１）図 2-1 の２自由度振動系の自由振動を表す運動方程式を示せ。



はりの変形の様子については、２段階で考える必要がある。まず図の黒の破線（はりが静止の状態にある場合に図心を連ねた線分）が上方に x だけ平行移動して（青の破線）、その後、反時計方向に ϕ だけ回転したととらえる必要がある。

角 ϕ は微小と考えてよいので、$\sin\phi \approx \phi$ とみなして、長さを $L_1\phi, L_2\phi$ で表示する。
図から、はりの上下方向の運動方程式は上向きが正に注意すると、次式となる。

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1(x - L_1\phi) - k_2(x + L_2\phi)$$

$$\therefore M\frac{d^2x}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x + (k_1L_1 - k_2L_2)\phi$$

同じく、図から、はりの重心 G'' 周りの角運動方程式は反時計回りが正に注意すると、次式となる。

$$I\frac{d^2\phi}{dt^2} = +k_1(x - L_1\phi)\cdot L_1 - k_2(x + L_2\phi)\cdot L_2$$

$$\therefore I\frac{d^2\phi}{dt^2} = (k_1L_1 - k_2L_2)x + (k_1L_1^2 + k_2L_2^2)\phi$$

（２）重心回りの回転運動と重心の上下方向の運動は非連成
（二つの振動モード間の相互作用がない状態）になる条件を示せ。

（１）の結果より、

$$k_1L_1 - k_2L_2 = 0$$

を満たせば、上下方向の運動方程式と重心回りの角運動方程式は連成しない。

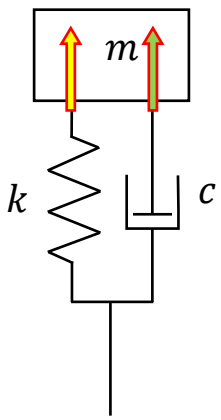
このとき、それぞれ次式となる。

$$\therefore M\frac{d^2x}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x$$

$$\therefore I\frac{d^2\phi}{dt^2} = (k_1L_1^2 + k_2L_2^2)\phi$$

（３）（２）で示した状態において、はりの重心に質量 m のおもりがばね定数 k_3 のばねと粘性係数 c のダンパを介して結合されたものとする（図 2-2)。地面が $x_0 = X\sin\omega t$ で上下に振動するとき、はりの重心の上下方向の運動とおもりの上下方向の運動方程式を示せ。

それぞれが、x, x_0, x_1 変位した状態を考える。



まず、おもりについての運動方程式を導く。

$x_1 < x$ と仮定すれば、

ばねは縮むので、ばねには $\boldsymbol{k_3(x - x_1)}$ の圧縮力が働く。

x_1 が動かないと仮定すれば、

ダッシュポットの直下の棒には $c\dot{x}$ の圧縮力が働く。

はりが動かないと仮定すれば、

ダッシュポットの直上の棒には $c\dot{x}_1$ の引張力が働く。

はりも、おもりも動く場合を考えれば、ダッシュポットには $\boldsymbol{c(\dot{x} - \dot{x}_1)}$ の圧縮力が働く。

ゆえに、おもりの運動方程式は次式となる。

$$\therefore m\frac{d^2x}{dt^2} = k_3(x - x_1) + c(\dot{x} - \dot{x}_1)$$

次に、はりの運動方程式については、（１）も参考にして、おもりと同様に考える。

$$\therefore M\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1(x - L_1\phi - x_0) - k_2(x + L_2\phi - x_0) - k_3(x - x_1) - c(\dot{x} - \dot{x}_1)$$

$$\therefore M\frac{d^2x}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x + (k_1L_1 - k_2L_2)\phi + (k_1 + k_2)x_0 - k_3(x - x_1) - c(\dot{x} - \dot{x}_1)$$

（２）の条件

$$k_1L_1 - k_2L_2 = 0$$

を代入して、

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x + (k_1 + k_2)x_0 - k_3(x - x_1) - c(\dot{x} - \dot{x}_1)$$

$$\therefore M\frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_2)x + k_3(x - x_1) + c(\dot{x} - \dot{x}_1) = (k_1 + k_2)x_0$$

$x_0 = X\sin\omega t$ を代入する。

$$\therefore M\frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_2)x + k_3(x - x_1) + c(\dot{x} - \dot{x}_1) = (k_1 + k_2)X\sin\omega t$$

（４）（３）で示した状態において、粘性係数 c を 0 としたとき、
はりの変位 x の振幅が 0 となる条件を示せ。

粘性係数 c を 0 としたとき、（３）の結果はそれぞれ次式となる。

$$\therefore m\frac{d^2x_1}{dt^2} = k_3(x - x_1) \quad (1)$$

$$\therefore M\frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_2)x + k_3(x - x_1) = (k_1 + k_2)X\sin\omega t \quad (2)$$

式(1),(2)の解をそれぞれ次式で仮定する。

$$x = A\sin\omega t, \quad x_1 = B\sin\omega t$$

これらを微分する。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\sin\omega t, \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\omega^2 B\sin\omega t$$

以上より、式(1),(2)に仮定した解を代入して整理して、A, B を連立して求める。

$$m(-\omega^2 B\sin\omega t) = k_3(A\sin\omega t - B\sin\omega t) \quad (1)'$$

$$M(-\omega^2 A\sin\omega t) + (k_1+k_2)(A\sin\omega t) + k_3(A\sin\omega t - B\sin\omega t) = (k_1+k_2)X\sin\omega t \quad (2)'$$

両辺 $\sin\omega t$ で除して整理する。

$$-m\omega^2 B = k_3 A - k_3 B \quad (1)''$$

$$-M\omega^2 A + (k_1+k_2+k_3)A - k_3 B = (k_1+k_2)X \quad (2)''$$

$$(k_3 - m\omega^2)B = k_3 A \quad (1)'''$$

$$(k_1+k_2+k_3 - M\omega^2)A - (k_1+k_2)X = k_3 B \quad (2)'''$$

$$\therefore B = \frac{k_3}{k_3 - m\omega^2}A \quad (1)''''$$

これを、$(2)'''$ に代入する。

$$(k_1+k_2+k_3 - M\omega^2)A - (k_1+k_2)X = k_3 \cdot \frac{k_3}{k_3 - m\omega^2}A \quad (2)''''$$

$$(k_1+k_2+k_3 - M\omega^2)A - \frac{k_3^2}{k_3 - m\omega^2}A = (k_1+k_2)X$$

$$\left\{(k_1+k_2+k_3 - M\omega^2) - \frac{k_3^2}{k_3 - m\omega^2}\right\}A = (k_1+k_2)X$$

両辺 $k_3 - m\omega^2$ を乗じて整理する。

$$\{(k_3 - m\omega^2)(k_1+k_2+k_3 - M\omega^2) - k_3^2\}A = (k_3 - m\omega^2)(k_1+k_2)X$$

$$\therefore A = \frac{(k_3 - m\omega^2)(k_1+k_2)}{(k_3 - m\omega^2)(k_1+k_2+k_3 - M\omega^2) - k_3^2}X$$

$x = A\sin\omega t = 0$ を満たすためには、上式の分子が 0 となる必要がある。

よって、はりの変位 x の振幅が 0 となる条件は、

$$k_3 - m\omega^2 = 0$$

（5）以下の5つの単語の英訳を示せ。

・運動方程式　・固有振動数　・振動　・変位　・自由度

・運動方程式：equation of motion

・固有振動数：natural frequency

・振動：vibration

・変位：displacement

・自由度：degree of freedom

2019（H31）年度【２】略解

（１）	$M\frac{d^2x}{dt^2} = -(k_1+k_2)x + (k_1L_1 - k_2L_2)\phi$ $I\frac{d^2\phi}{dt^2} = (k_1L_1 - k_2L_2)x + (k_1L_1^2 + k_2L_2^2)\phi$
（２）	$k_1L_1 - k_2L_2 = 0$
（３）	$M\frac{d^2x}{dt^2} + (k_1+k_2)x + k_3(x-x_1) + c(\dot{x}-\dot{x}_1) = (k_1+k_2)X\sin\omega t$ $m\frac{d^2x}{dt^2} = k_3(x-x_1) + c(\dot{x}-\dot{x}_1)$
（４）	$k_3 - m\omega^2 = 0$
（５）	・運動方程式：equation of motion ・固有振動数：natural frequency ・振動：vibration ・変位：displacement ・自由度：degree of freedom

2019（H31）年度【２】講評

問題設定が複雑であるように感じられるが、あらかじめ図も用意されており、問題文から、正確に状況がイメージできれば、大した問題ではない。（ムリやねんそれが）

（１）図を正確に描けるかどうかで全てが決まってしまう。

（２）に関しては、運動方程式さえ立式できれば、即答できる。

（３）に関しても、図を正確に描けるかどうかで全てが決まる。

（４）計算が煩雑だが、冷静に対処したい。本番は焦るだろうけど。

（５）これ、全問正解できるやついるんか、甚だ疑問。