2020 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：機械力学　［1 / 2］

（問題 [1]，[2]は別々の答案用紙に解答すること．）

[1] 長さ$\sqrt{3}a$，幅a，質量Mの一様な長方形の剛体の板がある．この板の鉛直 2 次元平面内における運動について，以下の問に答えよ．ただし，重力加速度をgとする．

(1) 板の頂点 A を摩擦のない鉛直壁に，頂点 B を摩擦のある水平面にそれぞれ接触させ立てかけた(図 1-1)．点 A における垂直抗力をf，板の長さ方向と床とのなす角をθとする．この板が静止しているとき，点 B まわりのモーメントのつり合い式を示せ．また，水平方向のつり合いより，点 B における静止摩擦力FをM，gおよび$\tan\theta$を用いて示せ．

(2) 問(1)において，板を反時計回りに少しずつ傾けたところ，θが角αを下回ったときにすべりはじめた．点 B における静止摩擦係数をμとするとき，角αを求めよ．

次に，板を壁と平面から離し，頂点 D を中心として板面と同一平面内で回転できる状態で固定した．このときの平板の運動について，以下の問に答えよ．ただし，固定点における摩擦，および空気抵抗による減衰は無視できるものとする．

(3) 板の重心 G まわりの板の慣性モーメントI_Gを求めよ．また，点 D まわりの板の慣性モーメントI_DをI_Gを用いて示せ．

(4) 線分 BD と鉛直方向とのなす角をφとし，板を静止させた(図 1-2)．この板を静かに放したところ，微小振動を開始した．このときの板の振動を表す運動方程式をI_Dを用いて示せ．また，この振動の周期T_1を求めよ．ただし，反時計回りを正とし，$\sin\varphi \fallingdotseq \varphi$で近似できるものとする．

(5) 問(4)において，板の固定点を線分 DG 上の点 E に移動させた(図 1-3)．線分 EG の長さをxとするとき，板の振動の周期T_2をI_Gを用いて示せ．また，周期T_2が最小となるときの線分 EG の長さx_aをI_Gを用いて示せ．

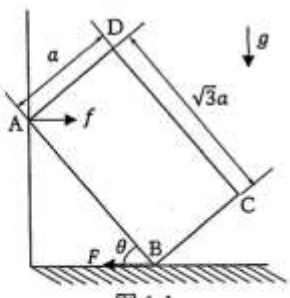


図 1-1

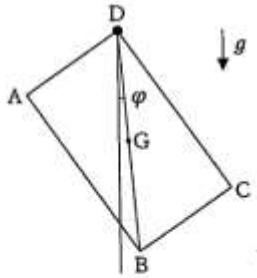


図 1-2

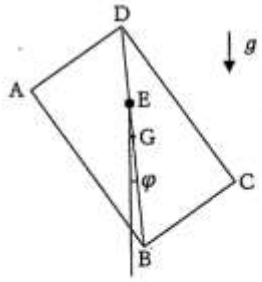


図 1-3

2020（R2）年度【１】問題〈回転運動〉

【１】長さ $\sqrt{3}a$, 幅 a, 質量 M の一様な長方形の剛体の板がある。
この板の鉛直２次元平面内における運動について、以下の問に答えよ。

（１）点 A における垂直抗力を f, 板の長さ方向と床のなす角を θ とする。
この板が静止しているとき、点 B まわりのモーメントのつり合い式を示せ。
また、水平方向のつり合いより、点 B における静止摩擦力 F を M, g および $\tan\theta$ を用いて示せ。

・点 B まわりのモーメントのつり合い式

$$\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot Mg\cos\theta = \sqrt{3}a\sin\theta\cdot f + \frac{a}{2}\cdot Mg\sin\theta$$

$$\therefore f = \frac{Mg}{2}\left(\frac{1}{\tan\theta} - \sqrt{3}\right)$$

水平方向のつり合いより、

$$F = f = \frac{Mg}{2}\left(\frac{1}{\tan\theta} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

（２）問（１）において、板を反時計回りに少しずつ傾けたところ、θ が角 α を下回ったときにすべりはじめた。点 B における静止摩擦係数を μ とするとき、角 α を求めよ。

静止摩擦係数を μ とすると、最大静止摩擦力 F は

$$F = \mu N = \mu Mg$$

（１）より

$$F = \frac{Mg}{2}\left(\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

よって、$\theta = \alpha$ のときにすべりはじめるので、

$$\frac{Mg}{2}\left(\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \mu Mg, \quad \therefore \frac{Mg}{\tan\alpha} = Mg\left(2\mu + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \therefore \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\mu + 1}$$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\mu + 1}$$

次に、板を壁と平面から離し、頂点 D を中心として板面と同一平面内で回転できる状態で固定した。このときの平板の運動について、以下の問に答えよ。

（3）板の重心 G 周りの板の慣性モーメント I_G を求めよ。
また、点 D 周りの板の慣性モーメント I_D を I_G を用いて示せ。

【慣性モーメントの定義】

剛体のある軸回りの慣性モーメント I は、剛体を構成する微小部分の質量を dm とし、軸とその微小部分との距離を r とすると、次式で定義される。

$$I = \int r^2\, dm$$

★ 平行軸の定理

重心を通る z 軸に関する慣性モーメントを I_G　z' 軸に関する慣性モーメントを $I_{z'}$
z' 軸から z 軸の距離を e, 物体の質量を M とすると、

$$I_{z'} = I_G + e^2 M$$

棒の重心周りの慣性モーメント I_G を求める。

面密度は $M/\sqrt{3}a^2$, 微小面積は $dxdy$, 軸とその微小部分との距離を $r = \sqrt{x^2+y^2}$ として、

$$I_G = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{\sqrt{3}a}{2}}^{\frac{\sqrt{3}a}{2}} (x^2+y^2)\frac{M}{\sqrt{3}a^2} dxdy = \frac{4M}{\sqrt{3}a^2} \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}a}{2}} (x^2+y^2) dxdy$$

$$= \frac{4M}{\sqrt{3}a^2} \int_0^{\frac{a}{2}} \left[\frac{1}{3}x^3 + y^2 x\right]_0^{\frac{\sqrt{3}a}{2}} dy = \frac{4M}{\sqrt{3}a^2} \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}a^3}{8} + \frac{\sqrt{3}a}{2}y^2\right) dy$$

$$= \frac{4M}{\sqrt{3}a^2} \left[\frac{\sqrt{3}a^3}{8}y + \frac{\sqrt{3}a}{6}y^3\right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{4M}{\sqrt{3}a^2} \left(\frac{\sqrt{3}a^3}{8}\cdot\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}a}{6}\cdot\frac{a^3}{8}\right) = \frac{1}{3}Ma^2$$

$$\therefore I_G = \frac{1}{3}Ma^2$$

また、平行軸の定理より、点 D 周りの板の慣性モーメント I_D は、

$$I_D = I_G + a^2 M = \frac{1}{3}Ma^2 + Ma^2 = \frac{4}{3}Ma^2$$

（４）線分 BD と鉛直方向のなす角を φ とし、板を静止させた（図 1-2)。
この板を静かに放したところ、微小振動を開始した。このときの板の振動を表す運動方程式を I_D を用いて示せ。また、この振動の周期 T_1 を求めよ。
ただし、反時計回りを正とし、$\sin\varphi \approx \varphi$ で近似できるものとする。

・点 D 周りの回転の運動方程式（$M = I\ddot{\theta}$）

$$I_D\ddot{\varphi} = -a \cdot Mg\sin\varphi$$

また、角 θ は微小と考えてよいので、$\sin\theta \approx \theta$ とみなして、式を整理する。

$$I_D\ddot{\varphi} + Mga\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mga}{I_D}\varphi = 0$$

よって、固有角振動数 ω_n は、

$$\omega_n = \sqrt{\frac{Mga}{I_D}}$$

したがって、周期 T_1 は、

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{I_D}{Mga}}$$

（３）の結果を代入すると、

$$T_1 = 4\pi\sqrt{\frac{a}{3g}}$$

周期「上からリンゴ（l/g)」は常識。

（５）問（４）において、板の固定点を線分 DG 上の点 E に移動させた（図 1-3)。
線分 EG の長さを x とするとき、板の振動周期 T_2 を I_G を用いて示せ。
また、周期 T_2 が最小となるときの線分 EG の長さ x_a を I_G を用いて示せ。

・点 E 周りの回転の運動方程式（$M = I\ddot{\theta}$）

$$I_E\ddot{\varphi} = -x \cdot Mg\sin\varphi$$

また、角 θ は微小と考えてよいので、$\sin\theta \approx \theta$ とみなして、式を整理する。

$$I_E\ddot{\varphi} + Mgx\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgx}{I_E}\varphi = 0$$

平行軸の定理より、点 E 周りの板の慣性モーメント I_E は、

$$I_E = I_G + x^2M$$

よって、固有角振動数 ω_n は、

$$\omega_n = \sqrt{\frac{Mgx}{I_E}} = \sqrt{\frac{Mgx}{I_G + x^2M}}$$

したがって、周期 T_2 は、

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_G + x^2M}{Mgx}}$$

さて、この最小値を求めてゆく。ルートの中身を考える。

$$\frac{I_G + x^2M}{Mgx} = \frac{1}{Mg}\left(\frac{I_G}{x} + xM\right)$$

ここで、**相加・相乗平均の関係**より、

$$\frac{1}{Mg}\left(\frac{I_G}{x} + xM\right) \geq \frac{2}{Mg}\sqrt{\frac{I_G}{x} \cdot xM} = \frac{2}{Mg}\sqrt{MI_G}$$

このときの x は、

$$\frac{I_G}{x} = xM$$

を解いて、

$$x_a = \sqrt{\frac{I_G}{M}}$$

2020（R2）年度【１】略解

（１）	$\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot Mg\cos\theta=\sqrt{3}a\sin\theta\cdot f+\frac{a}{2}\cdot Mg\sin\theta$ $F=\frac{Mg}{2}\left(\frac{1}{\tan\theta}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
（２）	$\alpha=\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\mu+1}$
（３）	$I_G=\frac{1}{3}Ma^2,\quad I_D=\frac{4}{3}Ma^2$
（４）	$\ddot{\varphi}+\frac{Mga}{I_D}\varphi=0,\quad T_1=4\pi\sqrt{\frac{a}{3g}}$
（５）	$T_2=2\pi\sqrt{\frac{I_G+x^2M}{Mgx}},\quad x_a=\sqrt{\frac{I_G}{M}}$

2020（R2）年度【１】講評

慣性モーメントと回転運動に関しての基本的な知識を問う問題である。
あらかじめ図も用意されており、問題文も非常に丁寧である。（文長いけど）
（１）分解を正確に。モーメントの問題では、うでの分解をする方が楽なことが多い。
（２）定義は与えられていないが、積分の計算をするだけ。
（３）平行軸の定理は知っておく。
（４）回転運動の角運動方程式はしっかり立式できるように。
角振動数を求めた後、周期を求める。「上からリンゴ」
（５）平行軸の定理を再び用いる。相加相乗平均の関係を用いて最小値を求める。

2020 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：機械力学 ［2 / 2］

（問題 [1]，[2] は別々の答案用紙に解答すること．）

[2] 図 2-1 に示すように，質量mのおもりが複数のばねおよびダッシュポッドで箱に接続された 1 自由度振動系を考える．ばねのばね定数およびダッシュポッドの減衰係数はそれぞれkおよびcである．箱は加振器の上に固定されており，加振器の上面は変位$x_0 = X_0 \cos \omega t$で振動し箱を励振する．箱の枠は剛体とする．おもりの変位をyとするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 系全体のばね定数Kおよび減衰比ζを求めよ．
(2) 変位yについての運動方程式を示せ．ただし，減衰比ζおよび固有角振動数$\omega_n = \sqrt{K/m}$を用いること．
(3) 問(2)の運動方程式について，定常状態における解を$y = Y \cos(\omega t - \varphi)$とし，振幅$Y$および位相角$\varphi$を求めよ．
(4) 加振振動数比をω/ω_nとする．$\omega/\omega_n \gg 1$または$\omega/\omega_n \ll 1$としたときの振幅Yと位相角φを求めよ．また，$\omega/\omega_n \gg 1$のとき振幅Yが加振器変位振幅X_0に，$\omega/\omega_n \ll 1$のとき振幅Yが加振器加速度振幅$m\omega^2 X_0$に比例することを示せ．
(5) 加振振動数比ω/ω_nと無次元化振幅Y/X_0，および加振振動数比ω/ω_nと位相角φの関係の概形をそれぞれ図示せよ．また，可能な範囲で図中に式または数字，漸近線を示せ．ただし，図 2-2 に示すように軸をとること．

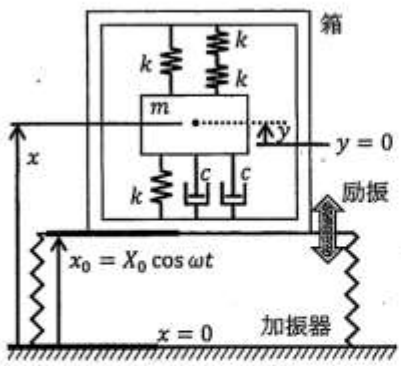


図 2-1

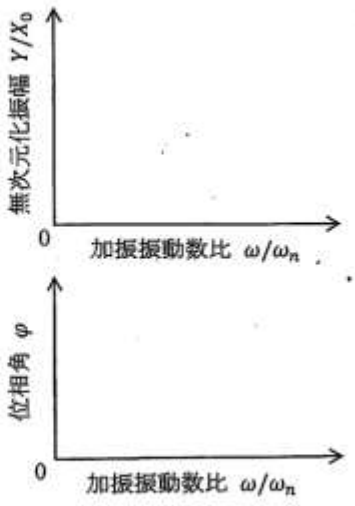


図 2-2

2020（R2）年度【２】問題〈強制振動〉

（１）系全体のばね定数 K および減衰比 ζ を求めよ。

・ばね定数 K

$$（直列部分）\ \frac{1}{K'}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k},\quad \therefore K'=\frac{1}{2}k$$

よって、並列部分を計算して、

$$K=K'+k+k=\frac{5}{2}k$$

・減衰係数 C

並列部分を計算して、

$$C=c+c=2c$$

・減衰比 ζ

$$\frac{C}{m}=2\zeta\omega_n$$

を解いて、

$$\therefore \zeta=\frac{C}{2m\omega_n}=c\sqrt{\frac{2}{5mk}}\quad \left(\because C=2c,\quad \omega_n=\sqrt{\frac{K}{m}}=\sqrt{\frac{5k}{2m}}\right)$$

（２）変位 y についての運動方程式を示せ。

ただし、減衰比 ζ および固有角振動数 $\omega_n=\sqrt{K/m}$ を用いること。

変位 y についての運動方程式は、加振力 $F=-m\ddot{x}_0$ を考慮して、

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{dy}{dt}+Ky=-m\ddot{x}_0$$

減衰比 ζ および固有角振動数 ω_n を用いると、

$$\ddot{y}+2\zeta\omega_n\dot{y}+{\omega_n}^2y=\omega^2X_0\cos\omega t$$

（3）問（2）の運動方程式について、定常状態における解を $y = Y\cos(\omega t - \varphi)$ とし、振幅 Y および位相角 φ を導出せよ。

求めた運動方程式（非同次微分方程式）の特解 z を $z = Ce^{i\omega t}$ とおき代入する。

ここで、強制振動の定常応答はこの特解 z の実部である。**計算の簡易化には複素化！**

また、$\omega^2 X_0 \cos\omega t = \mathrm{Re}\left[\omega^2 X_0 e^{i\omega t}\right]$ であることに注意する。

$$(-\omega^2 + 2\zeta\omega_n i\omega + {\omega_n}^2)Ce^{i\omega t} = \omega^2 X_0 e^{i\omega t}$$

$$\therefore C = \frac{1}{({\omega_n}^2 - \omega^2) + i \cdot 2\zeta\omega_n\omega} \cdot \omega^2 X_0$$

以降、変位 $x = Y\cos(\omega t - \varphi)$ の形に合わせていく。

ここで、C の分母を有理化して、実部・虚部に分ける。

$$C = \frac{{\omega_n}^2 - \omega^2}{({\omega_n}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2} \cdot \omega^2 X_0 - i\frac{2\zeta\omega_n\omega}{({\omega_n}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2} \cdot \omega^2 X_0$$

$$= Ye^{-i\varphi}$$

よって、特解 z は、

$$z = Ce^{i\omega t}$$

$$= Ye^{-i\varphi}e^{i\omega t} = Ye^{i(\omega t - \varphi)}$$

したがって、定常応答の振動振幅 Y と位相角 φ は、

$$Y = |C| = \frac{\omega^2}{\sqrt{({\omega_n}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \cdot X_0, \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{2\omega\zeta\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

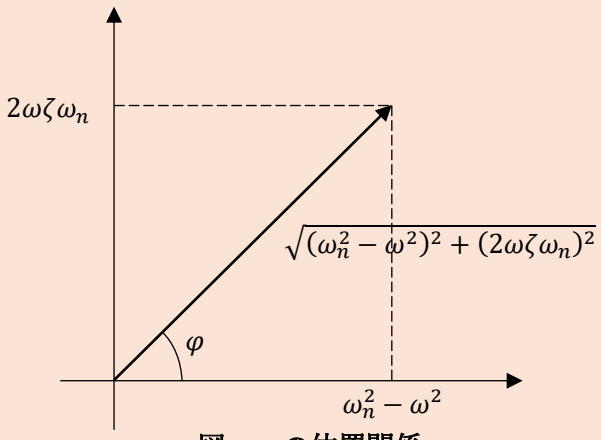


図　φ の位置関係

（４）加振振動数比を ω/ω_n とする。$\omega/\omega_n \gg 1$ または $\omega/\omega_n \ll 1$ としたときの振幅 Y と位相角 φ を求めよ、また、$\omega/\omega_n \gg 1$ のとき振幅 Y が加振器変位振幅 X_0 に、$\omega/\omega_n \ll 1$ のとき、振幅 Y が加振器加速度振幅 $m\omega^2 X_0$ に比例することを示せ。

（３）の結果より、

$$Y = \frac{\omega^2}{\sqrt{({\omega_n}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \cdot X_0, \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{2\omega\zeta\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

・$\omega/\omega_n \gg 1$ のとき

$\omega_n/\omega \ll 1$ となるので、ω_n/ω の 2 次以上の項を無視すると、

$$Y = \frac{1}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2 - 1\right\}^2 + \left\{2\zeta\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)\right\}^2}} \cdot X_0 = X_0, \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{2\zeta\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)}{\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2 - 1} = \tan^{-1}\left\{-2\zeta\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)\right\}$$

$$\therefore Y = X_0, \quad \varphi = \tan^{-1}\left\{-2\zeta\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)\right\}$$

$\omega/\omega_n \gg 1$ のとき、振幅 Y は加振器変位振幅 X_0 に比例する

・$\omega/\omega_n \ll 1$ のとき　ω/ω_n の 2 次以上の項を無視すると、

$$Y = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left\{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right\}^2}} \cdot X_0 = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 X_0, \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \tan^{-1}\left\{2\zeta\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)\right\}$$

$$\therefore Y = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 X_0, \quad \varphi = \tan^{-1}\left\{2\zeta\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)\right\}$$

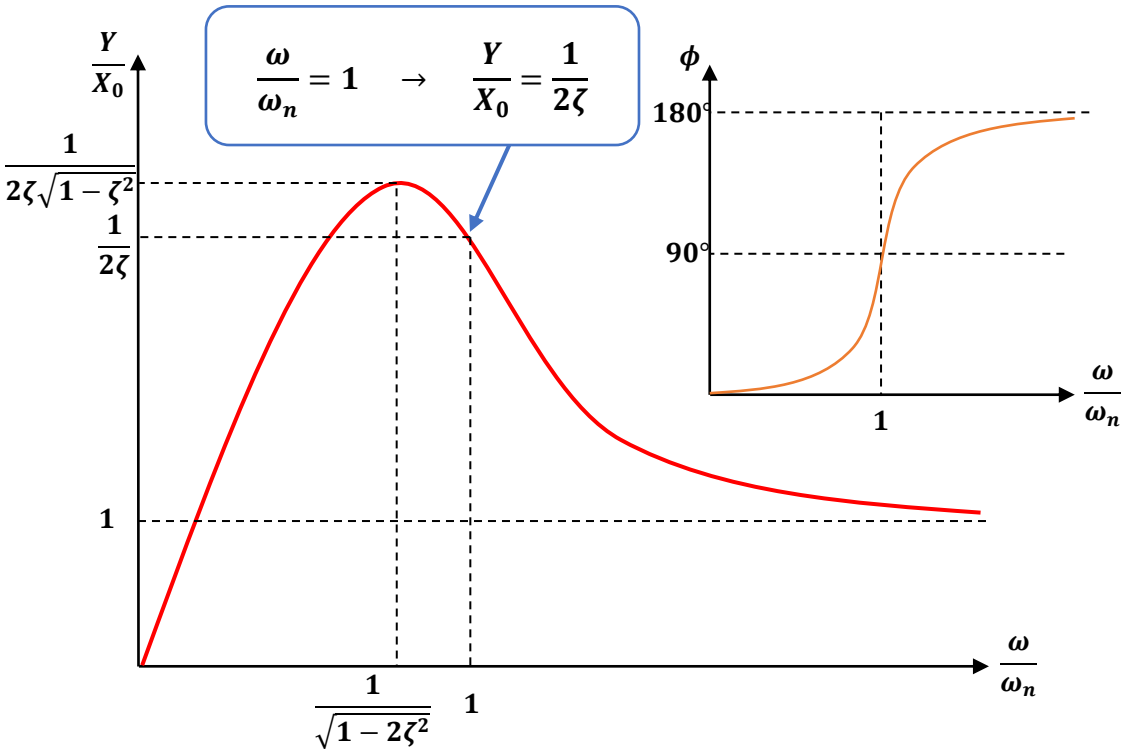
${\omega_n}^2 = K/m$ なので、

$$Y = \frac{1}{K} m\omega^2 X_0$$

$\omega/\omega_n \ll 1$ のとき、振幅 Y は加振器加速度振幅 $m\omega^2 X_0$ に比例する

（５）加振振動数比 ω/ω_n と無次元化振幅 Y/X_0 , および加振振動数比 ω/ω_n と位相角 φ の関係の概形をそれぞれ図示せよ。
また、可能な範囲で図中に式または数字、漸近線を示せ。

$$\frac{Y}{X_0}=\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left\{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right\}^2}},\quad \varphi=\tan^{-1}\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$



※$\zeta \ll 1$ のときは、$\omega/\omega_0=1$ のとき最大値をとる。

2020（R2）年度【２】略解

（１）	$K=\frac{5}{2}k,\quad \zeta=c\sqrt{\frac{2}{5mk}}$
（２）	$\ddot{y}+2\zeta\omega_n\dot{y}+{\omega_n}^2y=\omega^2X_0\cos\omega t$
（３）	略：複素解法で示した
（４）	略
（５）	略

2020（R2）年度【２】講評

（１）ばね定数・減衰係数の合成。並列・直列の違いに注意。

（２）加振力を考慮する。

（３）強制振動は、複素解法を用いるべきだろう。

（４）式変形して、微小項を無視するだけ。

（５）周波数応答曲線（共振曲線）は頻出のテーマであるため、押さえておく。