2022 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：機械力学　［ 1 / 2 ］

（問題 [1]，[2] は別々の答案用紙に解答すること．）

[1] 図 1-1 に示すモータの内部には点 P を中心として半径r，回転角速度ωで回転している質量mの質点がある．質量mを含めたモータの全質量をMとする．モータはばね定数k_1のばねと減衰係数cのダッシュポットで支持されており，点 O を原点としてx方向にのみ運動する振動系とする．以下の問いに答えよ．

(1) 図 1-1 の振動系におけるポテンシャルエネルギーUおよび運動エネルギーKを求めよ．

(2) ラグランジュの方程式を用いて，図 1-1 の振動系のxに関する運動方程式が以下の式で表せることを示せ．ここで非保存力を$Q = -c\dot{x}$とする．

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + k_1 x = mr\omega^2 \cos\omega t$$

(3) 上式の定常状態における変位を$x = A\cos(\omega t - \phi)$としたとき，振幅$A$と位相角$\phi$を導出せよ．

(4) 次に，図 1-2 に示すように，ばね定数k_2のばねをモータの上部に取り付け，その先端に回転と同じ角速度ωの周期的なx方向変位$u = a\cos(\omega t + \theta)$を与える．この場合の運動方程式を示せ．また，時間が十分経過した後，モータの振幅が 0 となるaとθを求めよ．ただし，$\omega > 0$，$a > 0$，$0 \le \theta < 2\pi$とする．

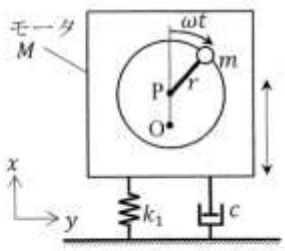


図 1-1

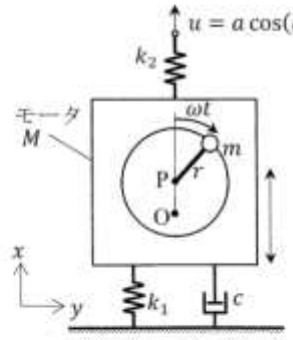


図 1-2

2022（R4）年度【１】問題〈不釣り合い振動〉

（１）図 1-1 の振動系におけるポテンシャルエネルギー U および運動エネルギー K を求めよ。

・ポテンシャルエネルギー U

$$U = \frac{1}{2}k_1 x^2$$

・運動エネルギー K

運動エネルギー K は、箱の運動エネルギー K_1 と回転体の運動エネルギー K_2 の和である。

・箱の運動エネルギー K_1

$$K_1 = \frac{1}{2}(M-m)\dot{x}^2$$

・回転体の運動エネルギー K_2

$$\begin{cases} x_m = x + r\cos\omega t \\ y_m = r\sin\omega t \end{cases}$$

ゆえに、

$$K_2 = \frac{1}{2}m[\{(x + r\cos\omega t)'\}^2 + \{(r\sin\omega t)'\}^2]$$

$$= \frac{1}{2}m\{(\dot{x} - r\omega\sin\omega t)^2 + (r\omega\cos\omega t)^2\} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 2\dot{x}r\omega\sin\omega t + r^2\omega^2)$$

$$K = K_1 + K_2$$

$$= \frac{1}{2}(M-m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 2\dot{x}r\omega\sin\omega t + r^2\omega^2)$$

$$\therefore K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - m\dot{x}r\omega\sin\omega t + \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

（２）ラグランジュの運動方程式を用いて、図 1-1 の振動系の x に関する運動方程式が以下の式で表せることを示せ。ここで、非保存力を $Q = -c\dot{x}$ とする。

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + k_1 x = mr\omega^2 \cos\omega t$$

ラグラジアンを求める。

・ラグラジアン $L = K - U$

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - m\dot{x}r\omega \sin\omega t + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - \frac{1}{2}k_1 x^2$$

・並進の運動方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = Q$$

$$\frac{d}{dt}(M\dot{x} - mr\omega \sin\omega t) + k_1 x = -c\dot{x}$$

これを整理する。

$$\therefore M\ddot{x} + c\dot{x} + k_1 x = mr\omega^2 \cos\omega t \quad \blacksquare$$

（３）上式の定常状態における変位を $x = A\cos(\omega t - \phi)$ としたとき、振幅 A と位相角 ϕ を導出せよ。

求めた運動方程式（非同次微分方程式）の特解 z を $z = Ce^{i\omega t}$ とおき代入する。

ここで、強制振動の定常応答はこの特解 z の実部である。**計算の簡易化には複素化！**

また、$mr\omega^2 \cos\omega t = \mathrm{Re}\left[mr\omega^2 e^{i\omega t}\right]$ であることに注意する。

$$-M\omega^2 Ce^{i\omega t} + i\omega cCe^{i\omega t} + k_1 Ce^{i\omega t} = mr\omega^2 e^{i\omega t}$$

固有角振動数 $\omega_n = \sqrt{k_1/M}$，減衰比 $\zeta = c/2\sqrt{Mk_1}$ を用いて式を整理する。（後で代入する。）

$$\left(-\omega^2 + \frac{c}{M}i\omega + \frac{k_1}{M}\right)Ce^{i\omega t} = \frac{mr\omega^2}{M}e^{i\omega t}$$

$$(-\omega^2 + 2\zeta\omega_n i\omega + {\omega_n}^2)C = \frac{mr\omega^2}{M}$$

$$\therefore C = \frac{1}{({\omega_n}^2 - \omega^2) + i \cdot 2\zeta\omega_n\omega} \cdot \frac{mr\omega^2}{M}$$

以降、変位 $x = A\cos(\omega t - \phi)$ の形に合わせていく。

ここで、C の分母を有理化して、実部・虚部に分ける。

$$C = \frac{{\omega_n}^2 - \omega^2}{({\omega_n}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2} \cdot \frac{mr\omega^2}{M} - i\frac{2\zeta\omega_n\omega}{({\omega_n}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2} \cdot \frac{mr\omega^2}{M}$$

$$= Ae^{-i\phi}$$

よって、特解 z は、

$$z = Ce^{i\omega t}$$

$$= Ae^{-i\phi}e^{i\omega t} = Ae^{i(\omega t - \phi)}$$

したがって、定常応答の振動振幅 A と位相角 ϕ は、

$$A = |C| = \frac{\omega^2}{\sqrt{({\omega_n}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \cdot \frac{mr}{M}, \quad \phi = \tan^{-1}\frac{2\omega\zeta\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

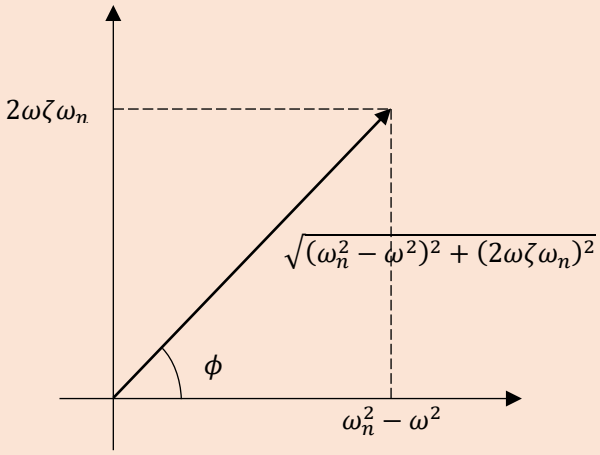


図　ϕ の位置関係

固有角振動数 $\omega_n = \sqrt{k_1/M}$, 減衰比 $\zeta = c/2\sqrt{Mk_1}$ を戻す。

$$A = \frac{mr\omega^2}{\sqrt{(k_1 - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}, \quad \phi = \tan^{-1}\frac{c\omega}{k_1 - M\omega^2}$$

【別解】$x = A\cos(\omega t - \phi)$ として（２）で導いた運動方程式に代入する。

$$-M\omega^2 A\cos(\omega t - \phi) - c\omega A\sin(\omega t - \phi) + k_1 A\cos(\omega t - \phi) = mr\omega^2\cos\omega t$$

ここで、加法定理を用いて、式を整理する。

$$\{(-M\omega^2 + k_1)A\cos\phi + c\omega A\sin\phi\}\cos\omega t + \{-(-M\omega^2 + k_1)A\sin\phi - c\omega A\cos\phi\}\sin\omega t$$
$$= mr\omega^2\cos\omega t$$

両辺 $\cos\omega t$，$\sin\omega t$ についての係数を比較すると、

$$\begin{cases} (-M\omega^2 + k_1)A\cos\phi + c\omega A\sin\phi = mr\omega^2\cos\omega t \\ -(-M\omega^2 + k_1)A\sin\phi - c\omega A\cos\phi = 0 \end{cases}$$

これを解いて求めてもよい（大変）

（４）次に、図 1-2 に示すように、ばね定数 k_2 のばねをモータの上部に取り付け、その先端に回転と同じ角速度 ω の周期的な x 方向変位 $u = a\cos(\omega t + \theta)$ を与えられる。この場合の運動方程式を示せ。また、時間が十分経過した後、モータの振幅が 0 となる a と θ を求めよ。ただし、$\omega > 0,\ a > 0,\ 0 \le \theta < 2\pi$ とする。

ばね定数 k_2 のばねに周期的な x 方向変位 u の変位のため、新たに加わる力は次式となる。

$$-k_2(x - u)$$

よって、運動方程式は、

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + k_1 x = mr\omega^2\cos\omega t - k_2(x - u)$$

したがって、$u = a\cos(\omega t + \theta)$ を代入して整理する。

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + (k_1 + k_2)x = mr\omega^2\cos\omega t + k_2 a\cos(\omega t + \theta)$$

モータの振幅が 0 となるため、運動方程式に $x = 0$ を代入すると、

$$0 = mr\omega^2\cos\omega t + k_2 a\cos(\omega t + \theta)$$

$$a\cos(\omega t + \theta) = -\frac{mr\omega^2}{k_2}\cos\omega t$$

$$= \frac{mr\omega^2}{k_2}\cos(\omega t + \pi)$$

$$\therefore a = \frac{mr\omega^2}{k_2},\quad \theta = \pi$$

2022（R4）年度【1】略解

（1）	$U = \frac{1}{2}k_1x^2$ $K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - m\dot{x}r\omega\sin\omega t + \frac{1}{2}mr^2\omega^2$
（2）	略
（3）	$A = \frac{mr\omega^2}{\sqrt{(k_1 - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$ $\phi = \tan^{-1}\frac{c\omega}{k_1 - M\omega^2}$
（4）	$M\ddot{x} + c\dot{x} + (k_1 + k_2)x = mr\omega^2\cos\omega t + k_2 a\cos(\omega t + \theta)$ $a = \frac{mr\omega^2}{k_2}, \quad \theta = \pi$

2022（R4）年度【1】講評

（1）ラグランジュの運動方程式を導出する際に、通常は箱の運動エネルギーのみ考え、回転体からの励振力を外力として考える場合があるが、今回は異なる。

（2）ラグランジュの運動方程式は押さえておく。

（3）減衰がともなう強制振動の場合、複素解析の方が計算は楽。

（4）運動方程式立てて、代入するだけ。

2022 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：機械力学　[2 / 2]

(問題 [1]，[2]は別々の答案用紙に回答すること．)

[2]　図 2-1 に示す両端がばねで支えられている一様な剛体棒の並進および回転運動に関する自由振動系を考える．左右の支持ばねのばね定数はそれぞれ k および $3k$ であり，棒の長さは l，質量 m である．この時，重心は棒の中心にあり x および θ 方向に振動する．なお，回転 θ は微小であり線形近似可能とする．以下の問に答えよ．

(1) 棒の重心周りの慣性モーメント I を導出と共に示せ．
(2) 左右のばねの変位 x_1, x_2 を重心の変位 x，および重心周りの回転 θ で示せ．また，並進運動 x および回転運動 θ に関する運動方程式を示せ．なお，棒の慣性モーメントは I を用いて良い．
(3) この振動系の固有角振動数を ω として，ω^2 を導出せよ．
(4) 図 2-2 に示すように，右のばねの上に棒と同じ質量 m の錘を付加し固定した．この時，錘を付加した棒の重心周りの慣性モーメント I' を導出せよ．また，重心の変位 x，および重心周りの回転 θ における運動方程式を示せ．更に，この時の棒の振動は図 2-1 の振動系と比較してどのような違いがあるか述べよ．

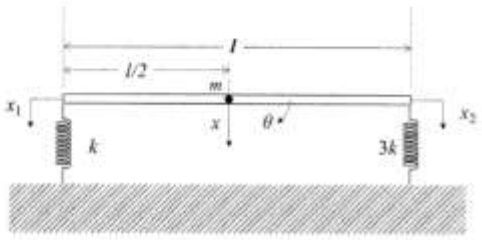


図 2-1

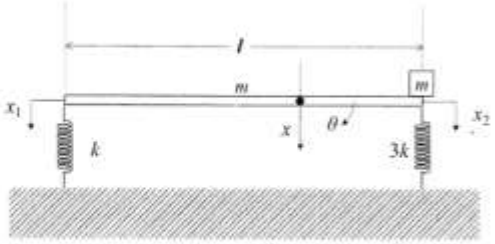


図 2-2

2022（R4）年度【２】問題〈回転振動〉

（１）棒の重心周りの慣性モーメント I を導出と共に示せ。

【慣性モーメントの定義】

剛体のある軸回りの慣性モーメント I は、剛体を構成する微小部分の質量を dm とし、軸とその微小部分との距離を r とすると、次式で定義される。

$$I = \int r^2\, dm$$

棒の重心周りの慣性モーメント I を求める。線密度は m/l, 長さは dx ゆえ、

$$I = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{2m}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{2m}{l}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{ml^2}{12}$$

（２）左右のばねの変位 x_1, x_2 を重心の変位 x, および重心周りの回転 θ で示せ。
また、並進運動 x および回転運動 θ に関する運動方程式を示せ。
なお、棒の慣性モーメントは I を用いて良い。

・左のばねの変位 x_1, 右のばねの変位 x_2

$$x_1 = x - \frac{l}{2}\sin\theta = x - \frac{l}{2}\theta, \quad x_2 = x + \frac{l}{2}\sin\theta = x + \frac{l}{2}\theta$$

また、角 θ は微小と考えてよいので、$\sin\theta \approx \theta$ とみなして、線形近似した。

・並進運動の運動方程式

$$m\ddot{x} = -k\left(x - \frac{l}{2}\theta\right) - 3k\left(x + \frac{l}{2}\theta\right)$$

$$\therefore m\ddot{x} + 4kx + kl\theta = 0$$

・回転運動の運動方程式

系の回転運動の方程式（$M = I\ddot{\theta}$）は次式となる。

$$I\ddot{\theta} = -\frac{l}{2}\cos\theta \cdot 3k\left(x + \frac{l}{2}\theta\right) + \frac{l}{2}\cos\theta \cdot k\left(x - \frac{l}{2}\theta\right) = -\frac{3kl}{2}\left(x + \frac{l}{2}\theta\right) + \frac{kl}{2}\left(x - \frac{l}{2}\theta\right)$$

また、角 θ は微小と考えてよいので、$\cos\theta \approx 1$ とみなして、線形近似した。

$$\therefore I\ddot{\theta} + klx + kl^2\theta = 0$$

（３）この振動系の固有角振動数を ω として、ω^2 を導出せよ。

（２）で求めたそれぞれの運動方程式を、行列形式で表示する。

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4k & kl \\ kl & kl^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この振動系の解を、

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ \Theta \end{pmatrix}\cos\omega t$$

と仮定し、上式に代入する。

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 m & 0 \\ 0 & -\omega^2 I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ \Theta \end{pmatrix}\cos\omega t + \begin{pmatrix} 4k & kl \\ kl & kl^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ \Theta \end{pmatrix}\cos\omega t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを整理する。

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 m + 4k & kl \\ kl & -\omega^2 I + kl^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

固有角振動数は、上式の**係数マトリックスの行列式をゼロ**とする

ω で与えられるので、振動数方程式は次式となる。

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 m + 4k & kl \\ kl & -\omega^2 I + kl^2 \end{vmatrix} = 0$$

よって、行列式を計算して、

$$(-m\omega^2 + 4k)(-I\omega^2 + kl^2) - k^2 l^2 = 0$$

$$mI\omega^4 - (4kI + mkl^2)\omega^2 + 3k^2 l^2 = 0$$

したがって、これを ω^2 の２次方程式とみて解の公式を用いる。

$$\omega^2 = \frac{(4kI + mkl^2) \pm \sqrt{(4kI + mkl^2)^2 - 12mIk^2 l^2}}{2mI}$$

（４）図 2-2 に示すように、右のばねの上に棒と同じ質量 m の錘（おもり）を付加し固定した。この時、錘を付加した棒の重心周りの慣性モーメント I' を導出せよ。また重心の変位 x, および重心周りの回転 θ における運動方程式を示せ。更に、この時の棒の振動は図 2-1 の振動系と比較してどのような違いがあるか述べよ。

・質点における慣性モーメント

質量 M の質点が回転軸から距離 r の位置に存在するとき、この質点の慣性モーメントは次式で計算される。

$$I = r^2 \times M$$

★ 平行軸の定理

重心を通る z 軸に関する慣性モーメントを I_G　z' 軸に関する慣性モーメントを $I_{z'}$

z' 軸から z 軸の距離を e　物体の質量を M とすると、

$$I_{z'} = I_G + e^2 M$$

錘を付けた後の重心位置は、錘を付ける前の重心位置と右のばねの間の丁度真ん中である。

おもり（質点）の重心周りの慣性モーメント I_a は、

$$I_a = \left(\frac{1}{4}l\right)^2 \times m = \frac{ml^2}{16}$$

また、平行軸の定理より、（１）の結果を用いると、
棒の新たな重心周りの慣性モーメント $I_{G'}$ は、

$$I_{G'} = I + \left(\frac{1}{4}l\right)^2 m = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{16} = \frac{7ml^2}{48}$$

よって、以上２つのそれぞれの慣性モーメントを合わせて、

$$I' = I_a + I_{G'} = \frac{ml^2}{16} + \frac{7ml^2}{48} = \frac{5ml^2}{24}$$

運動方程式は（２）と同様に考える。

・左のばねの変位 x_1, 右のばねの変位 x_2

$$x_1 = x - \frac{3l}{4}\sin\theta = x - \frac{3l}{4}\theta, \quad x_2 = x + \frac{l}{4}\sin\theta = x + \frac{l}{4}\theta$$

また、角 θ は微小と考えてよいので、$\sin\theta \approx \theta$ とみなして、線形近似した。

・並進運動の運動方程式

$$2m\ddot{x} = -k\left(x - \frac{3l}{4}\theta\right) - 3k\left(x + \frac{l}{4}\theta\right)$$

$$\therefore m\ddot{x} + 2kx = 0$$

・回転運動の運動方程式

系の回転運動の方程式（$M = I\ddot{\theta}$）は次式となる。

$$I\ddot{\theta} = -\frac{l}{4}\cos\theta \cdot 3k\left(x + \frac{l}{4}\theta\right) + \frac{3l}{4}\cos\theta \cdot k\left(x - \frac{3l}{4}\theta\right)$$

$$= -\frac{3kl}{4}\left(x + \frac{l}{4}\theta\right) + \frac{3kl}{4}\left(x - \frac{3l}{4}\theta\right)$$

また、角 θ は微小と考えてよいので、$\cos\theta \approx 1$ とみなして、線形近似した。

$$\therefore I\ddot{\theta} + \frac{3kl^2}{4}\theta = 0$$

2022（R4）年度【２】略解

（１）	$I = \dfrac{ml^2}{12}$
（２）	$x_1 = x - \dfrac{l}{2}\theta, \quad x_2 = x + \dfrac{l}{2}\theta$ $m\ddot{x} + 4kx + kl\theta = 0$ $I\ddot{\theta} + klx + kl^2\theta = 0$
（３）	$\omega^2 = \dfrac{(4kI + mkl^2) \pm \sqrt{(4kI + mkl^2)^2 - 12mIk^2l^2}}{2mI}$
（４）	$I' = \dfrac{5ml^2}{24}$ $m\ddot{x} + 2kx = 0$ $I\ddot{\theta} + \dfrac{3kl^2}{4}\theta = 0$ 非連成

2022（R4）年度【２】講評

（１）慣性モーメントは定義をしっかり押さえた上で、有名な結果は覚えておく。

（２）回転振動系の変位は 2019【２】を参照。今回は、下方に x だけ平行移動して、
その後 θ 回転したと考え、ばねの伸び・縮みを求めた。
回転運動の角運動方程式はしっかり立式できるように。

（３）行列形式で書いて振動数方程式を導出した。マトリックス形式には慣れておきたい。

（４）平行軸の定理は知っておく。