2023 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：機械力学　［ 1 / 2 ］

（問題 [1]，[2]は別々の答案用紙に解答すること．）

[1] 図 1-1 に示すように，半径 r，質量 m の一様な剛体円板が摩擦のない水平面上を水平右向きに滑っている．円板は時刻 $t = 0$ で摩擦のある平面に進入し，滑りながら転がり始めた．時刻 $t = 0$ における円板の並進速度を v_0，角速度を 0 とする．重力加速度を g，円板と摩擦のある平面の間の動摩擦係数を μ，円板の中心周りの慣性モーメントを $I = mr^2/2$ とし，円板の運動について以下の問いに答えよ．

(1) 円板の並進速度を v（右向きを正），回転運動の角速度を ω（時計回りを正）とする．滑りながら転がっているときの円板の並進運動，および回転運動の運動方程式を示せ．

(2) 問い(1)において，時刻 t での円板の並進速度 v，および平面と接触している円板上の点の速度 v' を求めよ．

(3) 時刻 $t = t_1$ で，円板は滑らずに一定の角速度で転がり始めた．このとき，t_1 を求めよ．

(4) 時刻 $t = 0$ から $t = t_1$ までの運動エネルギーの変化量を求めよ．

(5) 時刻 $t = t_1$ までに円板が滑った距離を L とするとき，動摩擦係数 μ を求めよ．

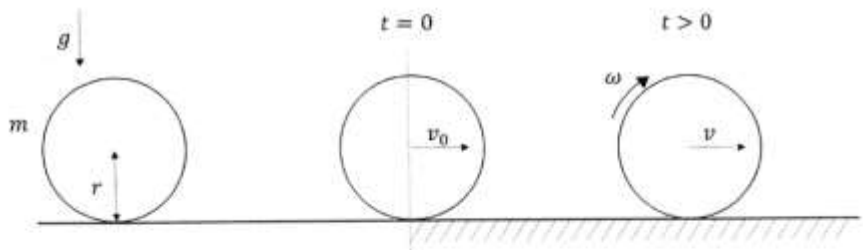


図 1-1

2023（R5）年度【１】問題〈回転運動〉

（１）円板の並進速度を v（右向きを正)、回転運動の角速度を ω（時計回りを正）とする。
滑りながら転がっているときの円板の並進運動、および回転運動の運動方程式を示せ。

並進運動の方程式（$F = m\ddot{x}$）は次式となる。

$$① \quad m\ddot{x} = -\mu mg \quad (\because N = mg)$$

ここで、

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \left(\because v = \frac{dx}{dt}\right)$$

よって、

$$\therefore m\frac{dv}{dt} = -\mu mg$$

回転運動の方程式（$M = I\ddot{\theta}$）は次式となる。時計回りが正であることに注意して、

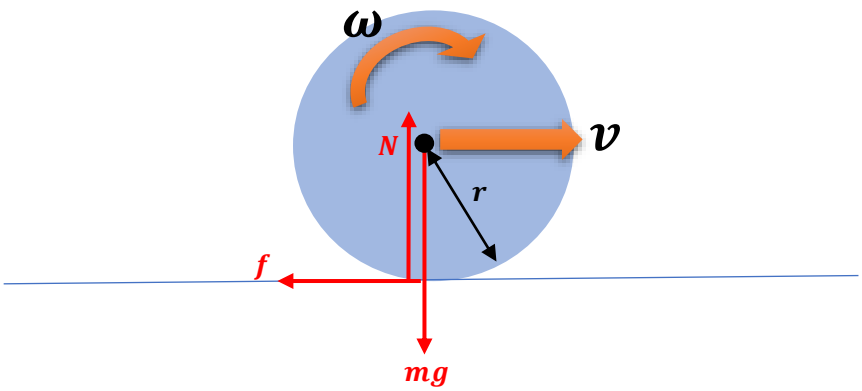
$$② \quad I\ddot{\theta} = R \cdot \mu mg$$

ここで、

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} \left(\because \omega = \frac{d\theta}{dt}\right)$$

よって、

$$\therefore \frac{mr^2}{2}\frac{d\omega}{dt} = \mu mgr$$



（2）問（1）において、時刻 t での円板の並進速度 v,
　　および平面と接触している円板上の点の速度 v' を求めよ。

（1）の並進運動の運動方程式より、加速度 $a(=\ddot{x}=dv/dt)$ は、

$$a=-\mu g$$

よって、等加速度直線運動の公式より、

$$v=v_0+at=v_0-\mu gt$$

接触している点におけるすべりの速度 v' は、

$$v'=v-r\omega$$

（1）の回転運動の運動方程式より、角速度 $\omega(=d\theta/dt)$ は、

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{2\mu g}{r} \quad \therefore \omega=\frac{2\mu g}{r}t\ (\because \omega_0=0)$$

よって、

$$v'=(v_0-\mu gt)-r\frac{2\mu g}{r}t=v_0-3\mu gt$$

（3）時刻 $t=t_1$ で、円板は滑らずに一定の角速度で転がり始めた。
　　このとき t_1 を求めよ。

円板が滑らなくなるとき、すべりの速度 v' が 0 になる。（滑らずに転がる条件：$v=r\omega$）

（2）の結果より、

$$v'=v_0-3\mu gt_1=0$$

$$\therefore t_1=\frac{v_0}{3\mu g}$$

（4）時刻 $t=0$ で $t=t_1$ までの運動エネルギーの変化量を求めよ。

時刻 t_1 での円板の並進速度 v_1, 角速度 ω_1 を、（2）（3）の結果より求める。

$$v_1=v_0-\mu g\frac{v_0}{3\mu g}=\frac{2}{3}v_0$$

$$\omega_1=\frac{2\mu g}{r}\frac{v_0}{3\mu g}=\frac{2}{3r}v_0$$

時刻 t_1 での、円板がもっている（回転の運動エネルギーを含む）運動エネルギー T' は、

$$T' = \frac{1}{2}m{v_1}^2 + \frac{1}{2}I{\omega_1}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}v_0\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\left(\frac{2}{3r}v_0\right)^2$$

$$= \frac{2}{9}m{v_0}^2 + \frac{1}{9}m{v_0}^2 = \frac{1}{3}m{v_0}^2$$

よって、運動エネルギーの変化量 ΔT は、

$$\Delta T = \frac{1}{3}m{v_0}^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = -\frac{1}{6}m{v_0}^2$$

（５）時刻 $t = t_1$ までに円板が滑った距離を L とするとき、動摩擦係数 μ を求めよ。

エネルギー保存則より、摩擦力がした仕事が、運動エネルギーの減少分に等しいので、

（４）の結果より、

$$-\mu mg \cdot L = -\frac{1}{6}m{v_0}^2$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{6gL}{v_0}^2$$

2023（R5）年度【１】略解

（１）	$m\dfrac{dv}{dt} = -\mu mg$ $\dfrac{mr^2}{2}\dfrac{d\omega}{dt} = \mu mgr$
（２）	$v = v_0 - \mu gt$ $v' = v_0 - 3\mu gt$
（３）	$t_1 = \dfrac{v_0}{3\mu g}$
（４）	$\Delta T = -\dfrac{1}{6}m{v_0}^2$
（５）	$\mu = \dfrac{1}{6gL}{v_0}^2$

2023（R5）年度【１】講評

回転運動に関しての基本的な知識を問う問題である。

（１）並進運動の運動方程式は問題ないだろうが、回転運動の運動方程式にも慣れておく。

（２）（３）並進運動と回転運動を結びつける $(v = r\omega)$ の式を使うことができるかどうか。

（４）（５）エネルギー保存則を適用するタイプの問題。

2023 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：機械力学　［ 2 / 2 ］

（問題[1], [2]は別々の答案用紙に解答すること.）

[2]　図 2-1 に示す質量 m の物体にばね定数 k のばね，減衰係数 c の減衰器，および反対側に変位 x_0 で水平振動する振動板をばね定数 K のばねで接続した 1 自由度強制振動系がある．次の問いに答えよ．

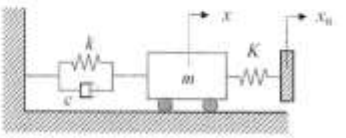


図 2-1

(1) この振動系の運動方程式を示せ．またこの振動系の固有角振動数 ω_n，臨界減衰係数 c_c，減衰比 $\zeta(=c/c_c)$および Q 値を示せ．

(2) 振動板は振幅 A，角振動数 ω の水平振動（$x_0 = A\cos\omega t$）をしている．この強制振動時の物体の定常振動を $x = B\cos(\omega t + \phi)$ として $\tan\phi$ および物体の振幅 B を K, A, m, ω_n, ζ, ω から適切な値を用いて導出を含めて示せ．

(3) 図 2-2(a), (b), (c)は物体の変位 x，速度 v および加速度 a の振幅$|x|(=B)$, $|v|$, $|a|$のいずれかをプロットしたグラフである（但し$\zeta<1$）．各グラフの縦軸の空欄（ア），（イ），（ウ）に対応する物理量を$|x|$、$|v|$、$|a|$から選んで記せ．また空欄（エ）～（ク）に該当する値を K, k, A, m, c, Q の中から適切な値を用いて示せ．

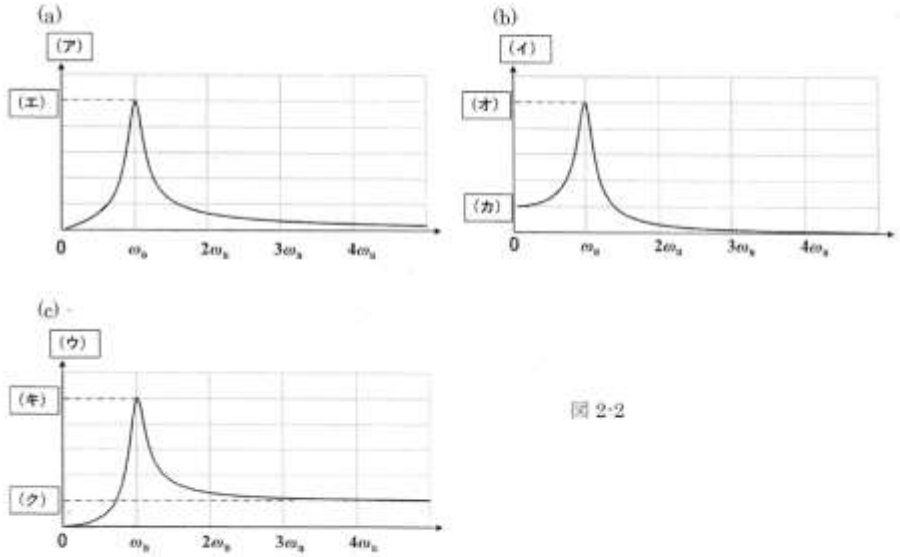


図 2-2

2023（R5）年度【２】問題〈ばね質量ダンパ系〉

（１）この振動系の運動方程式を示せ。またこの振動系の固有角振動数 ω_n ,
臨界減衰係数 c_c , 減衰比 $\zeta(=c/c_c)$ および Q 値を示せ。

運動方程式は、

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx+K(x-x_0)=0$$

減衰要素を考慮した１自由度の減衰振動を考える。
質点、ばね、速度比例形の減衰要素（ダンパ）をもつ系の自由振動の運動方程式は、

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$$

である。減衰要素のモデルには、他のタイプ（クーロン減衰など）もあるが、
この速度比例型が標準的である。上式は次のように変形できる。

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=0\,,\quad \omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}\,,\quad \zeta=\frac{c}{c_c}\,,\quad c_c=2\sqrt{mk}$$

ここで、ω_n は（不減衰）固有角振動数、ζ は減衰比、c_c は臨界減衰係数である。

・固有角振動数 ω_n

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k+K}{m}}$$

・臨界減衰係数 c_c

$$c_c=2\sqrt{m(k+K)}$$

・減衰比 ζ

$$\zeta=\frac{c}{2\sqrt{m(k+K)}}$$

・Q 値

$$Q=\frac{1}{2\zeta}=\frac{\sqrt{m(k+K)}}{c}$$

（２）振動板は振幅 A, 角振動数 ω の水平振動（$x_0 = A\cos\omega t$）をしている。
この強制振動時の物体の定常振動を $x = B\cos(\omega t + \phi)$ として $\tan\phi$ および
物体の振幅 B を $K, A, m, \omega_n, \zeta, \omega$ から適切な値を用いて導出を含めて示せ。

x_0 を代入すると、運動方程式は、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k+K)x = KA\cos\omega t$$

求めた運動方程式（非同次微分方程式）の特解 z を $z = Ce^{i\omega t}$ とおき代入する。
ここで、強制振動の定常応答はこの特解 z の実部である。**計算の簡易化には複素化！**
また、$KA\cos\omega t = \mathrm{Re}\left[KAe^{i\omega t}\right]$ であることに注意する。

$$-m\omega^2 Ce^{i\omega t} + i\omega cCe^{i\omega t} + (k+K)Ce^{i\omega t} = KAe^{i\omega t}$$

固有角振動数 $\omega_n = \sqrt{(k+K)/M}$, 減衰比 $\zeta = c/2\sqrt{M(k+K)}$ を用いて式を整理する。

$$\left(-\omega^2 + \frac{c}{m}i\omega + \frac{k+K}{m}\right)Ce^{i\omega t} = \frac{KA}{m}e^{i\omega t}$$

$$(-\omega^2 + 2\zeta\omega_n i\omega + {\omega_n}^2)C = \frac{KA}{m}$$

$$\therefore C = \frac{1}{({\omega_n}^2 - \omega^2) + i\cdot 2\zeta\omega_n\omega}\cdot\frac{KA}{m}$$

以降、定常変位 $x = B\cos(\omega t + \phi)$ の形に合わせていく。
ここで、C の分母を有理化して、実部・虚部に分ける。

$$C = \frac{{\omega_n}^2 - \omega^2}{({\omega_n}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}\cdot\frac{KA}{m} - i\frac{2\zeta\omega_n\omega}{({\omega_n}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}\cdot\frac{KA}{m}$$
$$= Be^{i\phi}$$

よって、特解 z は、

$$z = Ce^{i\omega t}$$
$$= Be^{i\phi}e^{i\omega t} = Be^{i(\omega t+\phi)}$$

したがって、定常応答の振動振幅 B と位相角 ϕ は、

$$B = |C| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_n{}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \cdot \frac{KA}{m}, \quad \tan\phi = \frac{-2\omega\zeta\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{-2\omega\zeta\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

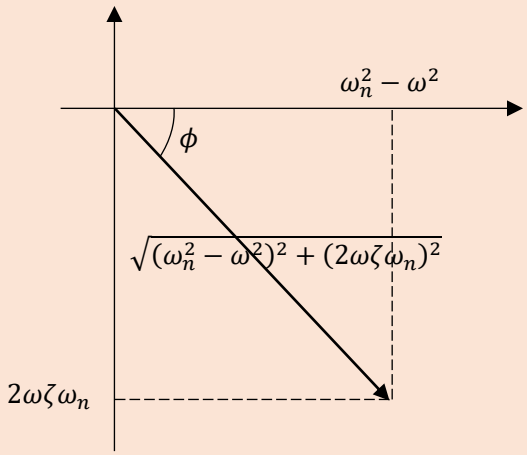


図　ϕ の位置関係

【別解】$x = B\cos(\omega t + \phi)$ として、運動方程式に代入する。

$$-m\omega^2 B\cos(\omega t + \phi) - c\omega B\sin(\omega t + \phi) + (k + K)B\cos(\omega t + \phi) = KB\cos(\omega t + \phi)$$

ここで、加法定理を用いて、式を整理したのち、

両辺 $\cos\omega t$，$\sin\omega t$ についての係数を比較して、解いて求めてもよい。（大変）

（３）各グラフの縦軸の空欄（ア）（イ）（ウ）に対応する物理量を、
$|x|, |v|, |a|$ から選んで記せ。また空欄（エ）～（ク）に該当する値を
K, k, A, m, c, Q の中から適切な値を用いて示せ。

直ちに、(b) のグラフが $|x|$ の周波数応答曲線であると分かる。（$\omega = 0$ で $|x| \neq 0$ より）

（イ） $= |x|$

（２）で求めた B に、$\omega = 0,\ \omega_n$ をそれぞれ代入すると（カ）（オ）は、

$$（カ） = \frac{1}{{\omega_n}^2} \cdot \frac{KA}{m} = \frac{m}{k+K} \cdot \frac{KA}{m} = \frac{KA}{k+K}$$

$$（オ） = \frac{1}{2\zeta{\omega_n}^2} \cdot \frac{KA}{m} = \frac{1}{(c/m)\sqrt{(K+k)/m}} \cdot \frac{KA}{m} = \frac{KA}{c}\sqrt{\frac{m}{K+k}}$$

次に、速度・加速度を求める。

$$x = B\cos(\omega t + \phi)$$

であるので、これを時間で 1 階微分したものが速度 v, 2 階微分したものが加速度 a である。

$$v = \dot{x} = -\omega B \sin(\omega t + \phi), \quad a = \ddot{x} = -\omega^2 B \cos(\omega t + \phi)$$

A を代入する。

$$\therefore |v| = \frac{\omega}{\sqrt{({\omega_n}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \cdot \frac{KA}{m}, \quad \therefore |a| = \frac{\omega^2}{\sqrt{({\omega_n}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \cdot \frac{KA}{m}$$

$\omega \to \infty$ としたとき、一定値に漸近していく（c）のグラフが、$|a|$ のグラフだと分かる。
（※これは不釣り合い振動の応答曲線としてお馴染み）

この一定値（ク）は、$|a|$ の $\omega \to \infty$ とすると、

$$（ク） = \frac{KA}{m}$$

$|a|$ に $\omega = \omega_n$ を代入すると（キ）は、

$$（キ） = \frac{{\omega_n}^2}{2\zeta{\omega_n}^2} \cdot \frac{KA}{m} = \frac{1}{2\zeta} \cdot \frac{KA}{m} = Q\frac{KA}{m}$$

$\omega = 0$ で $|v| = 0$ より、（a）のグラフが、$|v|$ のグラフだと分かる。

$|v|$ に $\omega = \omega_n$ を代入すると（エ）は、

$$（エ） = \frac{\omega_n}{2\zeta{\omega_n}^2} \cdot \frac{KA}{m} = \frac{1}{2\zeta\omega_n} \cdot \frac{KA}{m} = \frac{1}{c/m} \cdot \frac{KA}{m} = \frac{KA}{c}$$

2023（R5）年度【２】略解

（１）	$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx+K(x-x_0)=0$ $\omega_n=\sqrt{\frac{k+K}{m}},\quad c_c=2\sqrt{m(k+K)}$ $\zeta=\frac{c}{2\sqrt{m(k+K)}},\quad Q=\frac{\sqrt{m(k+K)}}{c}$
（２）	$B=\frac{1}{\sqrt{({\omega_n}^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}\cdot\frac{KA}{m},\quad \tan\phi=\frac{-2\omega\zeta\omega_n}{\omega_n^2-\omega^2}$

（３）		
（ア）	（イ）	（ウ）
$\lvert v\rvert$	$\lvert x\rvert$	$\lvert a\rvert$
（エ）	（オ）	（カ）
$\frac{KA}{c}$	$\frac{KA}{c}\sqrt{\frac{m}{K+k}}$	$\frac{KA}{k}$
（キ）	（ク）	
$Q\frac{KA}{m}$	$\frac{KA}{m}$	

2023（R5）年度【２】講評

ばねマスダンパ系。変位励振型。

（１）各用語の定義は全部暗記しておく

（２）複素解法で示した。

（３）周波数応答曲線はおさえておく。