平成 29 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：材料力学　［1/2］

(問題[1]，[2]は別々の答案用紙に解答すること．)

[1]

図 1-1 および図 1-2 に示すような 2 種の材料から構成されるテーパ付き中実丸棒 AB を考える．AC 部および CB 部の材料のせん断弾性係数をそれぞれ G_1 および G_2 とし，また，両部におけるテーパの勾配は互いに等しいとして，以下の各問いに答えなさい．なお，解答には，C 断面での径 d_m を用いてよい．

(1) 図 1-1 に示すように，B 端で剛体壁に固定し，自由端 A にトルク T を作用させる．

(a) 丸棒の任意の位置における断面二次極モーメント I_p を，A 端からの距離 x の関数として求めなさい．ただし，導出過程は示さなくてよい．

(b) C 断面に対する A 端のねじれ角 φ_{AC}，固定端に対する C 断面のねじれ角 φ_{CB}，および丸棒全体でのねじれ角 φ をそれぞれ求めなさい．

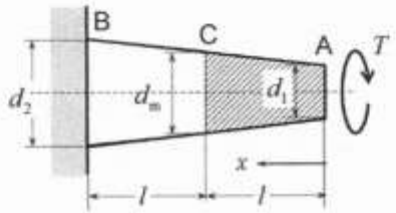


図1-1

(2) 図 1-2 に示すように，図 1-1 のテーパ棒において自由端 A を拘束し，代わりに C 断面にトルク T を作用させる．このとき A，B 端で生じる支持トルクをそれぞれ T_A および T_B とする．

(a) ねじれ角が連続である条件より，次の関係式が成り立つことを示しなさい．

$$\frac{T_A}{G_1}\left(\frac{1}{d_m^3}-\frac{1}{d_1^3}\right)=\frac{T_B}{G_2}\left(\frac{1}{d_2^3}-\frac{1}{d_m^3}\right)$$

(b) A 端および B 端における支持トルク T_A および T_B をそれぞれ求めなさい．

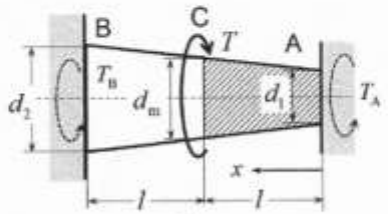


図1-2

2017（H29）年度【１】問題〈テーパ棒〉

（１）図 1-1 に示すように、B 端で剛体棒に固定し、自由端 A にトルク T を作用させる。

（a）丸棒の任意の位置における断面二次極モーメント I_p を、
A 端からの距離 x の関数として求めなさい。ただし、導出過程は示さなくてよい。

丸棒の断面二次極モーメント I_p は、直径を d として次式で表せる。

〈丸棒〉 $I_p = \dfrac{\pi d^4}{32}$

直径を $d(x)$ として、任意の位置における断面二次極モーメント I_p は、次式で表せる。

$$I_p = \frac{\pi d^4(x)}{32}$$

任意の位置 x における直径 $d(x)$ は、

$$d(x) = \frac{d_2 - d_1}{2l - 0}x + d_1 = \frac{d_2 - d_1}{2l}x + d_1$$

よって、

$$\therefore I_p = \frac{\pi}{32}\left(\frac{d_2 - d_1}{2l}x + d_1\right)^4$$

（b）C 断面に対する A 端のねじれ角 φ_{AC}, 固定端に対する C 断面のねじれ角 φ_{CB},
および丸棒全体でのねじれ角 φ をそれぞれ求めなさい。

トルク（力のモーメント）のつり合いより、AC・CB 間の内トルクはいずれも T となる。

ここで、比ねじれ角は、次式で表せる。

〈比ねじれ角〉 $\phi = \dfrac{T}{GI_p}$

よって、ねじれ角 φ_{AC} および φ_{CB} は、次式で求められる。

$$\varphi_{AC} = \int_0^l \frac{T}{G_1 I_p}dx, \quad \varphi_{CB} = \int_i^{2l} \frac{T}{G_2 I_p}dx$$

（1）の結果を代入する。

$$\varphi_{AC} = \int_0^l \frac{T}{G_1 I_p} dx$$

$$= \frac{32T}{G_1 \pi} \int_0^l \left(\frac{d_2 - d_1}{2l} x + d_1 \right)^{-4} dx = \frac{32T}{G_1 \pi} \left[\frac{1}{-3} \frac{2l}{d_2 - d_1} \left(\frac{d_2 - d_1}{2l} x + d_1 \right)^{-3} \right]_0^l$$

$$= -\frac{64T}{3G_1 \pi} \frac{l}{d_2 - d_1} \left\{ \left(\frac{d_2 - d_1}{2} + d_1 \right)^{-3} - {d_1}^{-3} \right\}$$

ここで、

$$\frac{d_2 - d_1}{2} + d_1 = d_m$$

より、

$$\therefore \varphi_{AC} = -\frac{64Tl}{3G_1 \pi (d_2 - d_1)} \left(\frac{1}{{d_m}^3} - \frac{1}{{d_1}^3} \right)$$

同様に、

$$\varphi_{CB} = \int_l^{2l} \frac{T}{G_2 I_p} dx$$

$$= \frac{32T}{G_2 \pi} \left[\frac{1}{-3} \frac{2l}{d_2 - d_1} \left(\frac{d_2 - d_1}{2l} x + d_1 \right)^{-3} \right]_l^{2l}$$

$$= -\frac{64T}{3G_2 \pi} \frac{l}{d_2 - d_1} \left\{ {d_2}^{-3} - \left(\frac{d_2 - d_1}{2} + d_1 \right)^{-3} \right\}$$

よって、

$$\therefore \varphi_{CB} = -\frac{64Tl}{3G_2 \pi (d_2 - d_1)} \left(\frac{1}{{d_2}^3} - \frac{1}{{d_m}^3} \right)$$

また、丸棒全体でのねじれ角 φ は、

$$\varphi = \varphi_{AC} + \varphi_{CB} = -\frac{64Tl}{3\pi (d_2 - d_1)} \left\{ \frac{1}{G_1} \left(\frac{1}{{d_m}^3} - \frac{1}{{d_1}^3} \right) + \frac{1}{G_2} \left(\frac{1}{{d_2}^3} - \frac{1}{{d_m}^3} \right) \right\}$$

（2）図 1-2 に示すように、図 1-1 のテーパ棒において自由端 A を拘束し、
代わりに C 断面にトルク T を作用させる。
このとき A,B 端で生じる支持トルクをそれぞれ T_A および T_B とする。

（a）ねじれ角が連続であるという条件より、次の関係式が成り立つことを示しなさい。

$$\frac{T_A}{G_1}\left(\frac{1}{{d_m}^3}-\frac{1}{{d_1}^3}\right)=\frac{T_B}{G_2}\left(\frac{1}{{d_2}^3}-\frac{1}{{d_m}^3}\right)$$

AC 間の内トルクは $-T_A$ となるので、ねじれ角 ${\varphi'}_{AC}$ は、（1）の結果を利用して、

$${\varphi'}_{AC}=\frac{64T_A l}{3G_1\pi(d_2-d_1)}\left(\frac{1}{{d_m}^3}-\frac{1}{{d_1}^3}\right)$$

CB 間の内トルクは T_B となるので、ねじれ角 ${\varphi'}_{CB}$ は、（1）の結果を利用して、

$${\varphi'}_{CB}=-\frac{64T_B l}{3G_2\pi(d_2-d_1)}\left(\frac{1}{{d_2}^3}-\frac{1}{{d_m}^3}\right)$$

ねじれ角 ${\varphi'}_{AC}$ および ${\varphi'}_{CB}$ の間の関係は、C 点で連続ゆえ、${\varphi'}_{CA}={\varphi'}_{CB}$

$$\therefore -{\varphi'}_{AC}={\varphi'}_{CB}$$

よって、

$$-\frac{64T_A l}{3G_1\pi(d_2-d_1)}\left(\frac{1}{{d_m}^3}-\frac{1}{{d_1}^3}\right)=-\frac{64T_B l}{3G_2\pi(d_2-d_1)}\left(\frac{1}{{d_2}^3}-\frac{1}{{d_m}^3}\right)$$

$$\therefore \frac{T_A}{G_1}\left(\frac{1}{{d_m}^3}-\frac{1}{{d_1}^3}\right)=\frac{T_B}{G_2}\left(\frac{1}{{d_2}^3}-\frac{1}{{d_m}^3}\right) \quad \blacksquare$$

（b）A 端および B 端における支持トルクを T_A および T_B をそれぞれ求めなさい。

自由体図において、トルク（力のモーメント）のつり合いより、

$$T=T_A+T_B$$

（a）の境界条件と連立して、支持トルクを求める。

$$\therefore T_A=\frac{G_1{d_1}^3\left({d_2}^3-{d_m}^3\right)}{G_1{d_1}^3\left({d_2}^3-{d_m}^3\right)+G_2{d_2}^3\left({d_m}^3-{d_1}^3\right)}T$$

$$\therefore T_B=\frac{G_2{d_2}^3\left({d_m}^3-{d_1}^3\right)}{G_1{d_1}^3\left({d_2}^3-{d_m}^3\right)+G_2{d_2}^3\left({d_m}^3-{d_1}^3\right)}T$$

2017（H29）年度【1】略解

（1）	
(a)	$I_p = \frac{\pi}{32}\left(\frac{d_2 - d_1}{2l}x + d_1\right)^4$
(b)	$\varphi_{AC} = -\frac{64Tl}{3G_1\pi(d_2 - d_1)}\left(\frac{1}{{d_m}^3} - \frac{1}{{d_1}^3}\right)$ $\varphi_{CB} = -\frac{64Tl}{3G_2\pi(d_2 - d_1)}\left(\frac{1}{{d_2}^3} - \frac{1}{{d_m}^3}\right)$ $\varphi - \frac{64Tl}{3\pi(d_2 - d_1)}\left\{\frac{1}{G_1}\left(\frac{1}{{d_m}^3} - \frac{1}{{d_1}^3}\right) + \frac{1}{G_2}\left(\frac{1}{{d_2}^3} - \frac{1}{{d_m}^3}\right)\right\}$
（2）	
(a)	略
(b)	$\therefore T_A = \frac{G_1{d_1}^3\left({d_2}^3 - {d_m}^3\right)}{G_1{d_1}^3\left({d_2}^3 - {d_m}^3\right) + G_2{d_2}^3\left({d_m}^3 - {d_1}^3\right)}T$ $\therefore T_B = \frac{G_2{d_2}^3\left({d_m}^3 - {d_1}^3\right)}{G_1{d_1}^3\left({d_2}^3 - {d_m}^3\right) + G_2{d_2}^3\left({d_m}^3 - {d_1}^3\right)}T$

2017（R3）年度【1】講評

ねじりの問題であった。

テーパ棒は、断面積が変化するため断面二次モーメントが距離 x の関数となる。

平成 29 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：材料力学 ［2/2］

（問題[2]の答案は，問題[2]専用の答案用紙に記入すること）

[2]

図 2-1 に示すように，長さ $2L$，曲げ剛性 EI（一定）のはり AB が，点 A で回転支持，点 C で移動支持されている．このはりの CB 間には単位長さあたりの大きさ q の一様分布外力が作用している．以下の問いに答えなさい．ただし，はりの変形については，軸力やせん断によるたわみの影響は無視できるものとする．

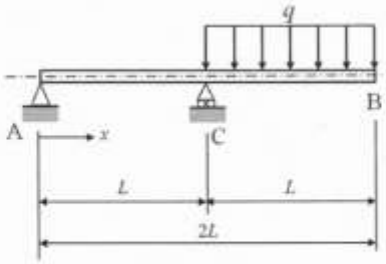


図 2-1

(1) 点 A および点 C における支持力をすべて求めなさい．

(2) AC 間の横断面に作用するせん断力 F_{AC} および曲げモーメント M_{AC}，CB 間の横断面に作用するせん断力 F_{CB} および曲げモーメント M_{CB} を，点 A から横断面までの距離 x を用いて表しなさい．また，せん断力図および曲げモーメント図を描きなさい．ただし，図には，点 A，点 B および点 C におけるせん断力および曲げモーメントの値を記しておくこと．

(3) はりの AC 間のたわみ角 θ_{AC} およびたわみ v_{AC}，CB 間のたわみ角 θ_{CB} およびたわみ v_{CB} を表す式を，x を用いて表しなさい．

(4) 点 B におけるたわみ v_B を求めなさい．

(5) つぎに，図 2-2 に示すように，点 A に集中モーメント M_A を作用させることで，点 B のたわみが 0 となるようにした．この時の，M_A と q の関係を求めなさい．

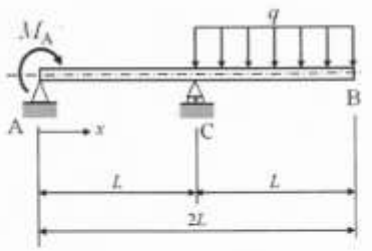


図 2-2

2017（H29）年度【２】問題〈曲げによるたわみ〉

【１】図 2-1 に示すように、長さ $2L$, 曲げ剛性 EI（一定）のはり AB が点 A で回転支持、点 B で移動支持されている。このはりの CB 間には単位長さあたりの大きさ q の一様分布外力が作用している。以下の問いに答えなさい。

（１）点 A および点 C における支持力をすべて求めなさい。

点 A および点 C における支持力を $H_A, R_A,\ R_C$ とする。

ここで、回転支持の点 A では水平方向の支持力 $H_A = 0$ である。

自由体図において、鉛直方向の力のつり合いより、

$$R_A + R_C = \int_0^L q\ dx = qL$$

点 A における、力のモーメントのつり合いより、

$$L \cdot R_C = \int_L^{2L} x \cdot q\ dx = \frac{3}{2}qL^2$$

よって、2 式より、

$$\therefore R_C = \frac{3}{2}qL, \qquad R_A = -\frac{1}{2}qL$$

（２）AC 間の横断面に作用するせん断力 F_{AC} および曲げモーメント M_{AC} ,
CB 間の横断面に作用するせん断力 F_{CB} および曲げモーメント M_{CB} を、
点 A から横断面までの距離 x を用いて表しなさい。
また、せん断力図および曲げモーメント図を描きなさい。ただし、図には、
点 A, 点 B および点 C におけるせん断力および曲げモーメントの値を記すこと。

〈AC 間〉AC 間のある位置 x を考える。

鉛直方向の力のつり合いより、

$$F_{AC} = R_A$$

位置 x における、力のモーメントのつり合いより、

$$M_{AC} = x \cdot R_A$$

（１）より、R_Aを代入する。

$$\therefore F_{AC} = -\frac{1}{2}qL, \quad \therefore M_{AC} = -\frac{1}{2}qLx$$

〈CB 間〉CB 間のある位置 x を考える。

自由体図において、鉛直方向の力のつり合いより、

$$F_{CB} = R_A + R_C - \int_L^x q \ d\xi$$

（1）の結果を代入して、

$$\therefore F_{CB} = -q(x - 2L)$$

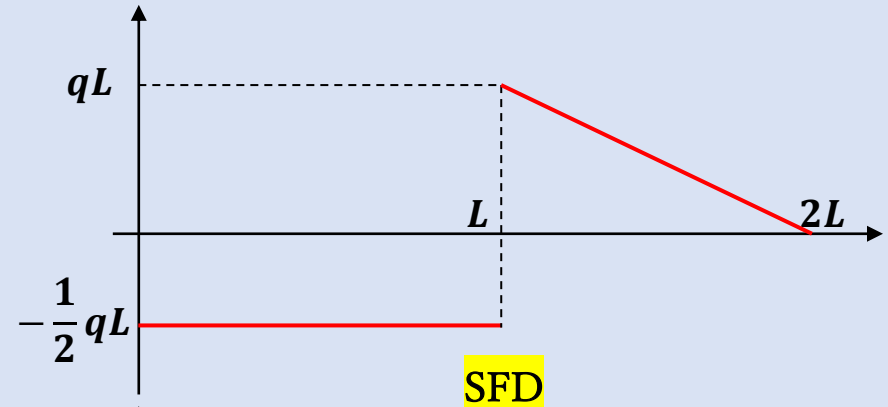
位置 x における、力のモーメントのつり合いより、

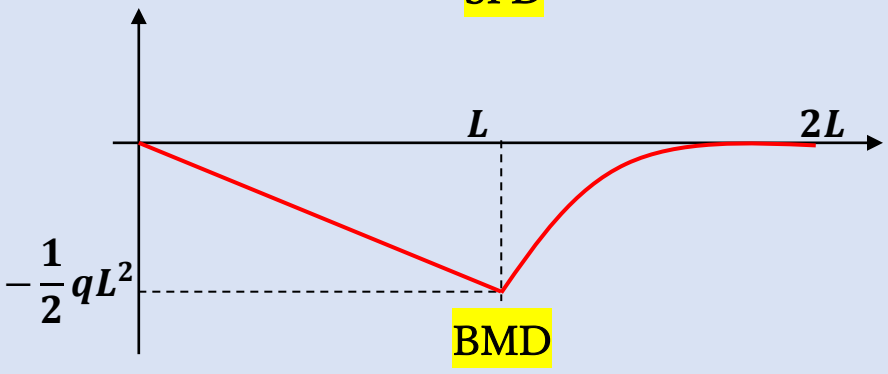
$$M_{CB} = xR_A + (x - L)R_C - \int_L^x (x - \xi) \cdot q d\xi$$

（1）の結果を代入して、

$$\therefore M_{CB} = -\frac{1}{2}q(x - 2L)^2$$

この後の積分計算を楽にするため、因数分解した形で表しておきたい。





（３）はりの AC 間のたわみ角 θ_{AC} およびたわみ v_{AC},
CB 間のたわみ角 θ_{CB} およびたわみ v_{CB}を表す式を、x ををを用いて表しなさい。

〈AC 間〉

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

（２）より、

$$-EI\frac{d^2v_{AC}}{dx^2} = M_{AC} = -\frac{1}{2}qLx$$

両辺を積分して、

$$-EI\frac{dv_{AC}}{dx} = \int\left(-\frac{1}{2}qLx\right)dx = -\frac{1}{4}qLx^2 + C_1 \qquad (1)$$

ふたたび、両辺を積分して、

$$-EIv_{AC} = \int\left(-\frac{1}{4}qLx^2 + C_1\right)dx = -\frac{1}{12}qLx^3 + C_1x + C_2 \qquad (2)$$

積分定数 C_1, C_2 を決定するため、
点 A（$x = 0$）と点 C（$x = L$）における以下の条件を適用する。

$$x = 0, L \text{ で} \qquad v_{AC} = 0$$

上の条件と式(1),(2)より、

$$C_1 = \frac{1}{12}qL^3, \quad C_2 = 0$$

よって、

$$\theta_{AC} = \frac{dv_{AC}}{dx} = -\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{4}qLx^2 + \frac{1}{12}qL^3\right) \quad \therefore \theta_{AC} = \frac{qL}{12EI}(3x^2 - L^2)$$

$$v_{AC} = -\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{12}qLx^3 + \frac{1}{12}qL^3x\right) \quad \therefore v_{AC} = \frac{qL}{12EI}x(x^2 - L^2)$$

ここで、点 C $(x = L)$ におけるたわみ v_C, たわみ角 θ_C を求めておく。

$$\therefore \theta_C = \frac{qL^3}{6EI} \quad \therefore v_C = 0$$

〈CB 間〉

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

（２）より、

$$-EI\frac{d^2v_{CB}}{dx^2} = M_{CB} = -\frac{1}{2}q(x-2L)^2$$

両辺を積分して、

$$-EI\frac{dv_{CB}}{dx} = -EI\theta_{CB} = -\frac{1}{6}q(x-2L)^3 + C_3 \tag{3}$$

ふたたび、両辺を積分して、

$$-EIv_{CB} = -\frac{1}{24}q(x-2L)^4 + C_3x + C_4 \tag{4}$$

積分定数 C_3, C_4 を決定するため、点 C ($x = L$) での結果を適用する。

$$\therefore \theta_C = \frac{qL^3}{6EI} \quad \therefore v_C = 0$$

上の条件と式(3),(4)より、

$$C_3 = -\frac{qL^3}{3}, \quad C_4 = \frac{3qL^4}{8}$$

よって、

$$\therefore \theta_{CB} = \frac{q}{6EI}\{(x-2L)^3 + 2L^3\}$$

$$\therefore v_{CB} = \frac{q}{24EI}\{(x-2L)^4 + 8L^3x - 9L^4\}$$

（４）点 B におけるたわみ v_B を求めなさい。

（３）の結果に、$x = 2L$ を代入する。

$$v_B = \frac{7qL^4}{24EI}$$

（5）つぎに、図 2-2 に示すように、点 A に集中モーメント M_A を作用させることで、点 B のたわみが 0 となるようにした。この時の、M_A と q の関係を求めなさい。

点 B に鉛直下向きに仮想外力 P_Q を作用させ、点 A に集中モーメント M_A のみが作用する場合を考える。そして、求めた点 B のたわみ v_Q を（4）の結果と重ね合わせする。

〈はりの曲げに関するカスチリアーノの定理〉

はりの任意の点での、たわみ角およびたわみを求めるには、任意点 Q に
仮想モーメント M_Q および仮想力 P_Q を作用させて、M_Q および $P_Q \to 0$ とする。

$$\theta_Q = \left(\frac{\partial U}{\partial M_Q}\right)_{M_Q=0} = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M'}{\partial M_Q}dx$$

$$v_Q = \left(\frac{\partial U}{\partial P_Q}\right)_{P_Q=0} = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M'}{\partial P_Q}dx$$

ここで、M' は仮想モーメント M_Q および仮想力 P_Q による曲げモーメントで
あるのに対し、M は実付加による曲げモーメントである。

自由体図において、鉛直方向の力のつり合いより、

$$R_A + R_C = P_Q$$

点 A における、力のモーメントのつり合いより、

$$L \cdot R_C = M_A + 2L \cdot P_Q$$

よって、2 式より、

$$\therefore R_C = \frac{M_A}{L} + 2P_Q, \qquad R_A = -\frac{M_A}{L} - P_Q$$

〈AC 間〉AC 間のある位置 x を考える。

位置 x における、力のモーメントのつり合いより、

$$M'_{AC} = x \cdot R_A + M_A = -\frac{M_A}{L}x - P_Q x + M_A$$

〈CB 間〉CB 間のある位置 x を考える。

位置 x における、力のモーメントのつり合いより、

$$M'_{CB} = xR_A + (x - L)R_C + M_A = (x - 2L)P_Q$$

よって、点 A に集中モーメント M_A のみが作用する場合の点 B のたわみ v_Q は、
カスチリアーノの定理より、

$$v_Q = \left(\frac{\partial U}{\partial P_Q}\right)_{P_Q=0}$$

$$= \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M'}{\partial P_Q}dx$$

$$= \int_0^L \frac{\left(-\frac{M_A}{L}x + M_A\right)}{EI}\frac{\partial}{\partial P_Q}\left(-P_Q x\right)dx + \int_L^{2L}\frac{(0)}{EI}\frac{\partial}{\partial P_Q}\{(x-2L)P_Q\}dx$$

$$= \frac{M_A}{EI}\int_0^L \left(\frac{1}{L}x^2 - x\right)dx = \frac{M_A}{EI}\left[\frac{1}{3L}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^L = -\frac{M_A L^2}{6EI}$$

$$\therefore v_Q = -\frac{M_A L^2}{6EI}$$

（4）の結果と重ね合わせの定理より、図 2-2 に示すように、
点 A に集中モーメント M_A を作用させた場合の点 B のたわみ v'_B は、

$$v'_B = v_B + v_Q = \frac{7qL^4}{24EI} - \frac{M_A L^2}{6EI}$$

点 B のたわみ v'_B は 0 となるので、

$$\frac{7qL^4}{24EI} - \frac{M_A L^2}{6EI} = 0$$

したがって、この時の M_A と q の関係は、

$$4M_A = 7qL^2$$

2017（H29）年度【２】略解

（１）	$H_A = 0, \quad R_A = -\frac{1}{2}qL, \quad R_C = \frac{3}{2}qL$
（２）	$F_{AC} = -\frac{1}{2}qL, \quad M_{AC} = -\frac{1}{2}qLx$ $F_{CB} = -q(x-2L), \quad M_{CB} = -\frac{1}{2}q(x-2L)^2$
（３）	$\theta_{AC} = \frac{qL}{12EI}(3x^2 - L^2), \quad v_{AC} = \frac{qL}{12EI}x(x^2 - L^2)$ $\theta_{CB} = \frac{q}{6EI}\{(x-2L)^3 + 2L^3\}, \quad v_{CB} = \frac{q}{24EI}\{(x-2L)^4 + 8L^3x - 9L^4\}$
（４）	$v_B = \frac{7qL^4}{24EI}$
（５）	$4M_A = 7qL^2$

2017（H29）年度【２】講評

たわみに関する基本的な問い。基本的ゆえに計算ミスに気を付けたい。 重ね合わせやカスチリアーノの定理を用いることで、無駄な計算を省くことが大切。