平成 30 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：材料力学　［1/2］

問題[1]，[2]は別々の答案用紙に解答すること．

[1]

図 1-1 に示すような，上端が固定された任意の断面積 $A(x)$ を持つ長さ l の丸棒に引張外力 P が作用している場合を考える．ただし，x は下端からの距離を表し，棒の縦弾性係数(ヤング率)を E とする．自重を無視することとし，以下の各問いに答えなさい．

(1) 任意の x 断面における軸力 $N(x)$ を求めなさい．
(2) 任意位置 x における微小要素 dx に対する伸び $d\lambda$ および全伸び λ を求める式をそれぞれ示しなさい．ただし，(1)の $N(x)$ を用いること．
(3) (1)および(2)の結果を用い，図 1-2(a)～(c)に示す各場合の全伸びを求めなさい．

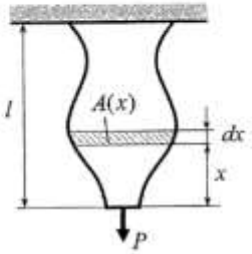


図 1-1

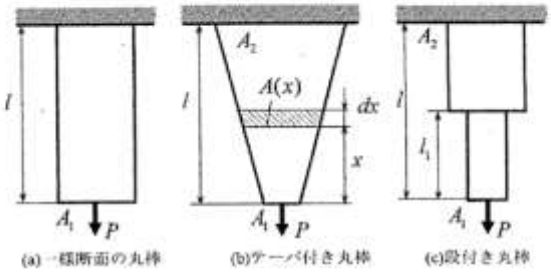


図 1-2

図 1-1 においてさらに自重を考慮する場合を考える．棒の密度を ρ，重力加速度を g とし，以下の各問いに答えなさい．

(4) 任意の x 断面における軸力 $N(x)$ を求めなさい．ただし，自重の影響については，図 1-3 中に併記した下端からの任意位置 ξ における微小要素 $d\xi$ に着目して考えること．
(5) (4)の結果を利用し，自重を考慮した場合の棒の全伸びを求める式を示しなさい．

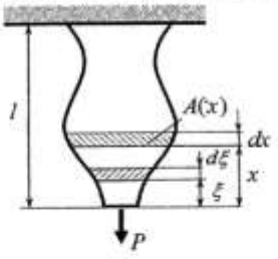


図 1-3

2018（H30）年度【１】問題〈丸棒のいろどり詰め合わせセット〉

（１）任意の x 断面における軸力 $N(x)$ を求めなさい。

引張内力 $N(x)$ は、鉛直方向の力のつり合いより、

$$N(x) = P$$

（２）任意位置 x における微小要素 dx に対する伸び $d\lambda$ および全伸び λ を求める式をそれぞれ示しなさい。ただし、（１）の $N(x)$ を用いること。

微小部分 dx の伸び $d\delta$ は次式となる。

$$d\delta = \varepsilon dx = \frac{\sigma}{E} dx$$

ここで、ε はひずみ、σ は応力、E はヤング率である。

よって、棒全体の伸び δ は次式で表せる。

$$\delta = \int d\delta = \int \frac{Q}{EA} dx$$

断面積は $A(x)$ ゆえ、丸棒断面に作用する引張応力 $\sigma(x)$ は、

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$$

よって、微小要素 dx に対する伸び $d\lambda$ は、

$$d\lambda = \frac{N(x)}{EA(x)} dx$$

また、全伸び λ は、

$$\lambda = \int d\lambda = \int_0^l \frac{N(x)}{EA(x)} dx$$

（３）（１）および（２）の結果を用い、図 1-2（a）～（c）に示す各場合の全伸びを求めなさい。

（a）～（c）で異なるのは、面積 $A(x)$ であるので場合分けを行う。

（a）一様断面の丸棒

面積は一定で、

$$A(x) = A_1$$

よって、$A(x) = A_1$, $N(x) = P$ を代入して、

$$\lambda_a = \int_0^l \frac{P}{EA_1} dx = \frac{Pl}{EA_1}$$

（b）テーパ付き丸棒

テーパ棒の直径はは直線的に変化するので、面積は次式で表せる。

$$A(x) = \frac{\pi}{4} d^2(x) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d_2 - d_1}{l - 0} x + d_1\right)^2$$

ここで、

$$A_1 = \frac{\pi}{4} {d_1}^2, \quad A_2 = \frac{\pi}{4} {d_2}^2 \qquad \therefore d_1 = 2\sqrt{\frac{A_1}{\pi}}, \quad d_2 = 2\sqrt{\frac{A_2}{\pi}}$$

よって、

$$A(x) = \left(\frac{\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}}{l} x + \sqrt{A_1}\right)^2$$

したがって、$A(x)$, $N(x) = P$ を代入して、

$$\lambda_b = \int_0^l \frac{P}{E\left(\frac{\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}}{l} x + \sqrt{A_1}\right)^2} dx$$

$$= \frac{P}{E} \int_0^l \left(\frac{\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}}{l} x + \sqrt{A_1}\right)^{-2} dx$$

$$= \frac{P}{E}\left[-\frac{l}{\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}} \left(\frac{\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}}{l} x + \sqrt{A_1}\right)^{-1} \right]_0^l$$

$$= \frac{Pl}{E\left(\sqrt{A_1} - \sqrt{A_2}\right)} \left(\frac{1}{\sqrt{A_2}} - \frac{1}{\sqrt{A_1}}\right) = \frac{Pl}{E\sqrt{A_1}\sqrt{A_2}}$$

$$\therefore \lambda_b = \frac{Pl}{E\sqrt{A_1 A_2}}$$

（c）段付き丸棒

段をまたぐまで面積は一定。（a）の結果を利用する。

$$\lambda_c = \int_0^{l_1} \frac{P}{EA_1} dx + \int_{l_1}^{l} \frac{P}{EA_2} dx$$

$$\therefore \lambda_c = \frac{Pl_1}{EA_1} + \frac{P(l - l_1)}{EA_2}$$

図 1-1 においてさらに自重を考える場合を考える。棒の密度を ρ, 重力加速度を g とし、以下の各問いに答えなさい。

（４）任意の x 断面における軸力 $N(x)$ を求めなさい。
ただし、自重の影響については、図 1-3 中に併記した下端からの任意位置 ξ における微小要素 $d\xi$ に着目して考えること。

任意の x 断面における鉛直方向の力のつり合いより、

$$N(x) = P + \int_0^x \rho \cdot d\xi A(\xi) \cdot g$$

よって、$N(x)$ は、

$$N(x) = P + \rho g \int_0^x A(\xi) d\xi$$

（５）（４）の結果を利用し、自重を考慮した場合の棒の全伸びを求める式を示しなさい。

自重を考慮した場合の棒の全伸び λ は、（４）で求めた $N(x)$ を代入して、

$$\lambda = \int_0^l \frac{1}{EA(x)} \left(P + \rho g \int_0^x A(\xi) d\xi \right) dx$$

2018（H30）年度【１】略解

（１）	$N(x) = P$
（２）	$d\lambda = \frac{N(x)}{EA(x)} dx, \quad \lambda = \int_0^l \frac{N(x)}{EA(x)} dx$
（３）	$\lambda_a = \frac{Pl}{EA_1}, \quad \lambda_b = \frac{Pl}{E\sqrt{A_1 A_2}}, \quad \lambda_c = \frac{Pl_1}{EA_1} + \frac{P(l-l_1)}{EA_2}$
（４）	$N(x) = P + \rho g \int_0^x A(\xi) d\xi$
（５）	$\lambda = \int_0^l \frac{1}{EA(x)} \left(P + \rho g \int_0^x A(\xi) d\xi \right) dx$

2018（H30）年度【１】講評

丸棒のいろどり詰め合わせセット。良問。

平成 30 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：材料力学　［2/2］

（問題[1]，[2]は，別々の答案用紙に解答すること．）

[2]

図 2-1 に示すように，長さ L，曲げ剛性 EI（一定）のはり AB が，点 A で固定支持，点 C で，断面積 A，縦弾性係数 E，線膨張係数 α，長さ L の針金 BC で吊られている．針金 BC はたるみのないように，はりに対して垂直に張られており，その端部の点 B および点 C は，自由に回転できるものとする．また，初期状態では，はりおよび針金の温度は T であり，はりおよび針金には，力は作用していないものとする．

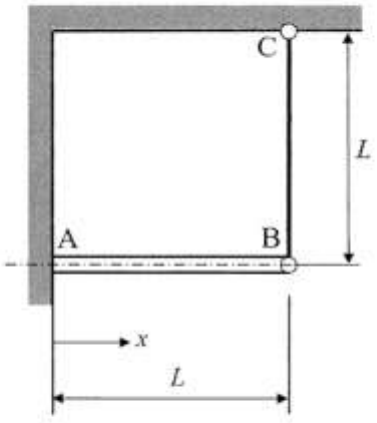


図 2-1

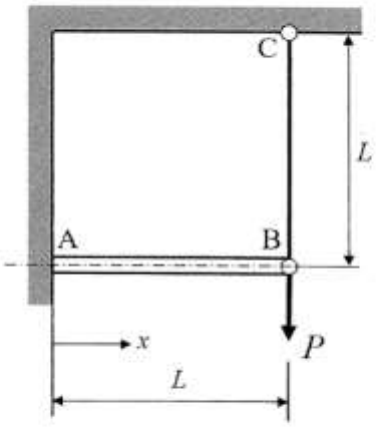


図 2-2

(1) 針金のみ温度を（T—ΔT）に降下させた場合について，以下の問いに答えなさい．

(1-a) 点 B のたわみを求めなさい．

(1-b) 針金に作用する応力を求めなさい．

(2) 次に針金の温度を初期状態 T に戻した後，点 B に，大きさ P の集中外力を図 2-2 のように作用させた場合について，以下の問いに答えなさい．

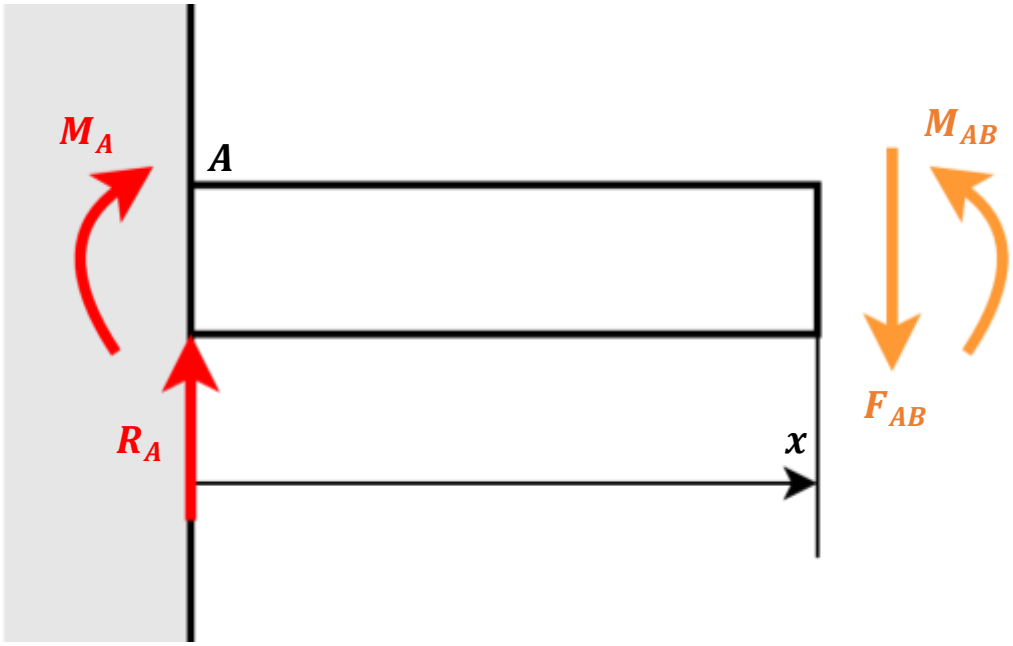
(2-a) 点 B のたわみを求めなさい．

(2-b) 針金に作用する応力を求めなさい．

2018（H30）年度【２】問題〈はりと針金〉

（１）針金のみ温度を $(T-\Delta T)$ に降下させた場合について、以下の問いに答えなさい。

（1-a）点 B のたわみを求めなさい。



〈AB 間〉AB 間のある位置 x を考える。

自由体図において、鉛直方向の力のつり合いより、

$$F_{AB} = R_A$$

点 A における、力のモーメントのつり合いより、

$$M_{AB} = M_A + x \cdot F_{AB}$$

点 A における支持力 R_A および支持モーメント M_A を求める。

ここで、針金 CB に引張の軸力 Q が作用すると、点 B においてはりは反作用の力 Q を鉛直上向きに受ける。

自由体図において、鉛直方向の力のつり合いより、

$$\therefore R_A = -Q$$

点 A における、力のモーメントのつり合いより、

$$\therefore M_A = LQ$$

よって、

$$F_{AB} = -Q, \quad M_{AB} = -xQ + LQ = (-x + L)Q$$

〈カスチリアーノの定理〉

① 軸力 Q だけが作用する場合

$$U = \int \frac{Q^2}{2EA} dx, \quad \delta = \frac{\partial U}{\partial Q}$$

② トルク T だけが作用する場合

$$U = \int \frac{T^2}{2GI_p} dx, \quad \varphi = \frac{\partial U}{\partial T}$$

③ 曲げモーメント M だけが作用する場合

$$U = \int \frac{M^2}{2EI} dx, \quad \theta = \frac{\partial U}{\partial M}$$

はり AB について、曲げモーメントによるひずみエネルギー U_1 は、

$$U_1 = \int_0^L \frac{(-x+L)^2 Q^2}{2EI} dx = \frac{Q^2 L^3}{6EI}$$

カスチリアーノの定理より、はり AB の点 B におけるたわみ v_B は、
鉛直下向きを正とすると、

$$v_B = \frac{\partial U}{\partial(-Q)} = -\frac{QL^3}{3EI}$$

〈参考〉片持ちはりの自由端に集中荷重 P が下向きに作用する場合のたわみ v

$$v = \frac{PL^3}{3EI}$$

※ 頻出ゆえ覚えておく。

針金 CB について、軸力によるひずみエネルギー U_2 は、

$$U_2 = \int_0^L \frac{Q^2}{2EA} dx = \frac{Q^2 L}{2EA}$$

カスチリアーノの定理より、針金 CB の軸力による伸び δ_{CB} は、

$$\delta_{CB} = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{QL}{EA}$$

ここで、**温度上昇によって発生する伸び**は、次式となる。

$$\delta = \alpha \Delta T L$$

よって、針金 BC の伸び δ_B は、

$$\delta_B = \delta_{CB} + \delta = \frac{QL}{EA} - \alpha \Delta T L$$

拘束条件より、はり AB の点 B におけるたわみ v_B と針金 BC の伸び δ_B の間の関係は、

$$v_B = \delta_B$$

$$-\frac{QL^3}{3EI} = \frac{QL}{EA} - \alpha \Delta T L$$

$$\therefore Q = \frac{3EIA\alpha\Delta T}{3I + AL^2}$$

したがって、

$$v_B = -\frac{QL^3}{3EI} = -\frac{AL^3\alpha\Delta T}{3I + AL^2}$$

（1-b）針金に作用する応力を求めなさい。

針金 CB に引張の軸力 Q が作用すると、針金に作用する応力 σ は、

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

（1-a）より、Q を代入して、

$$\sigma = \frac{3EI\alpha\Delta T}{3I + AL^2}$$

（２）次に針金の温度を初期状態 T に戻した後、点 B に、大きさ P の集中外力を図 2-2 のように作用させた場合について、以下の問いに答えなさい。

（2-a）点 B のたわみを求めなさい。

〈AB 間〉AB 間のある位置 x を考える。

自由体図において、鉛直方向の力のつり合いより、

$$F_{AB} = R_A$$

点 A における、力のモーメントのつり合いより、

$$M_{AB} = M_A + x \cdot F_{AB}$$

点 A における支持力 R_A および支持モーメント M_A を求める。

ここで、針金 CB に引張の軸力 Q' が作用すると、点 B においてはりは反作用の力 Q' を鉛直上向きに受ける。

自由体図において、鉛直方向の力のつり合いより、

$$\therefore R_A = -Q' + P$$

点 A における、力のモーメントのつり合いより、

$$\therefore M_A = LQ' - LP$$

よって、

$$F_{AB} = -Q' + P, \quad M_{AB} = LQ' - LP + x(-Q' + P) = (P - Q')(x - L)$$

はり AB について、曲げモーメントによるひずみエネルギー U'_1 は、

$$U'_1 = \int_0^L \frac{(P - Q')^2 (x - L)^2}{2EI} dx = \frac{(P - Q')^2 L^3}{6EI}$$

カスチリアーノの定理より、はり AB の点 B におけるたわみ v'_B は、
鉛直下向きを正とすると、

$$v'_B = \frac{\partial U}{\partial (P - Q')} = \frac{(P - Q')L^3}{3EI}$$

針金 CB について、軸力によるひずみエネルギー U'_2 は、

$$U'_2 = \int_0^L \frac{Q'^2}{2EA} dx = \frac{Q'^2 L}{2EA}$$

カスチリアーノの定理より、針金 CB の軸力による伸び δ'_{CB} は、

$$\delta'_{CB} = \frac{\partial U}{\partial Q'} = \frac{Q'L}{EA}$$

拘束条件より、はり AB の点 B におけるたわみ v'_B と針金 BC の伸び δ_{CB} の間の関係は、

$$v'_B = \delta'_{CB}$$

$$\frac{(P - Q')L^3}{3EI} = \frac{Q'L}{EA}$$

$$\therefore Q' = \frac{AL^2}{3I + AL^2} P$$

したがって、

$$v'_B = \frac{PL^3}{E(3I + AL^2)}$$

（2-b）針金に作用する応力を求めなさい。

針金 CB に引張の軸力 Q' が作用すると、針金に作用する応力 σ' は、

$$\sigma' = \frac{Q'}{A}$$

（2-a）より、Q' を代入して、

$$\sigma' = \frac{PL^2}{3I + AL^2}$$

2018（H30）年度【２】略解

（１）	
(1-a)	$v_B = -\dfrac{AL^3\alpha\Delta T}{3I + AL^2}$
(1-b)	$\sigma = \dfrac{3EI\alpha\Delta T}{3I + AL^2}$
（２）	
(2-a)	$v'_B = \dfrac{PL^3}{E(3I + AL^2)}$
(2-b)	$\sigma' = \dfrac{PL^2}{3I + AL^2}$

2018（H30）年度【２】講評

たわみに関する基本的な問い。基本的ゆえに計算ミスに気を付けたい。
カスチリアーノの定理を用いることで、無駄な計算を省くことが大切。
不静定問題は変形の適合性を考える。熱応力の公式も覚えておきたい。