平成 31 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：材料力学　［ 1 / 2 ］

（問題[1]，[2]は別々の答案用紙に回答すること．）

[1]

図 1-1 に示すように直径 d [mm]の丸棒が x 軸と平行となるように左端が固定されている．丸棒の固定端の，丸棒断面の中心が原点となるように xyz 座標系を定める．右端には丸棒の直径と比較して幅と厚さが十分小さい剛体板が z 軸と平行で，剛体板の長手方向の中心が丸棒の中心軸と一致するように接合されている．剛体板の各先端に y 軸方向に平行な P [N]および $0.2P$ [N]の大きさの集中外力がそれぞれ作用しており，丸棒の先端には x 軸方向に大きさ $5P$ [N]の引張集中外力が作用している．円周率を π とし，与えられた記号のみを用いて，以下の各問いに答えなさい．解答は解答用紙の右側欄の所定の場所に記述し，左側空欄に導出過程を記述すること．

(1) 丸棒先端に作用する引張集中外力により，丸棒断面（x 軸に垂直な断面）に作用する引張応力を求めなさい．

(2) 剛体板の先端に作用する集中外力により，丸棒固定端の表面上の点 A（$(x, y, z)=(0, -d/2, 0)$の位置）に作用する曲げ応力を求めなさい．

(3) A 点と，z 軸について対称な丸棒固定端の表面上の点 A'を図 1-1 のようにとる．A—A'線上における，x 軸方向の応力成分σ_x の応力分布を図示しなさい．応力分布図の特徴が分かるように必要な値を記述すること．

(4) 剛体板の先端に作用する集中外力によるトルクによって生じる，点 A に作用するせん断応力を求めなさい．

(5) 丸棒には軸力，曲げ，およびねじりが同時に作用する状態にある．丸棒の材料の許容せん断応力をτ_{al} [MPa]とするとき，軸の直径の二乗 d^2 が満たすべき条件式を求めなさい．

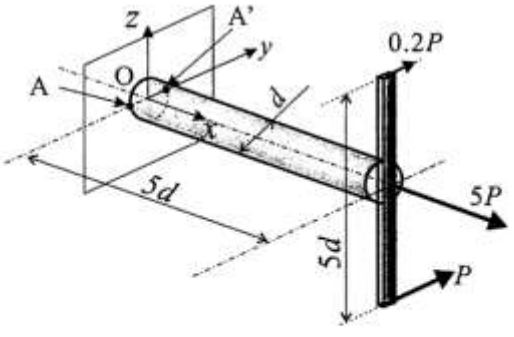


図 1-1

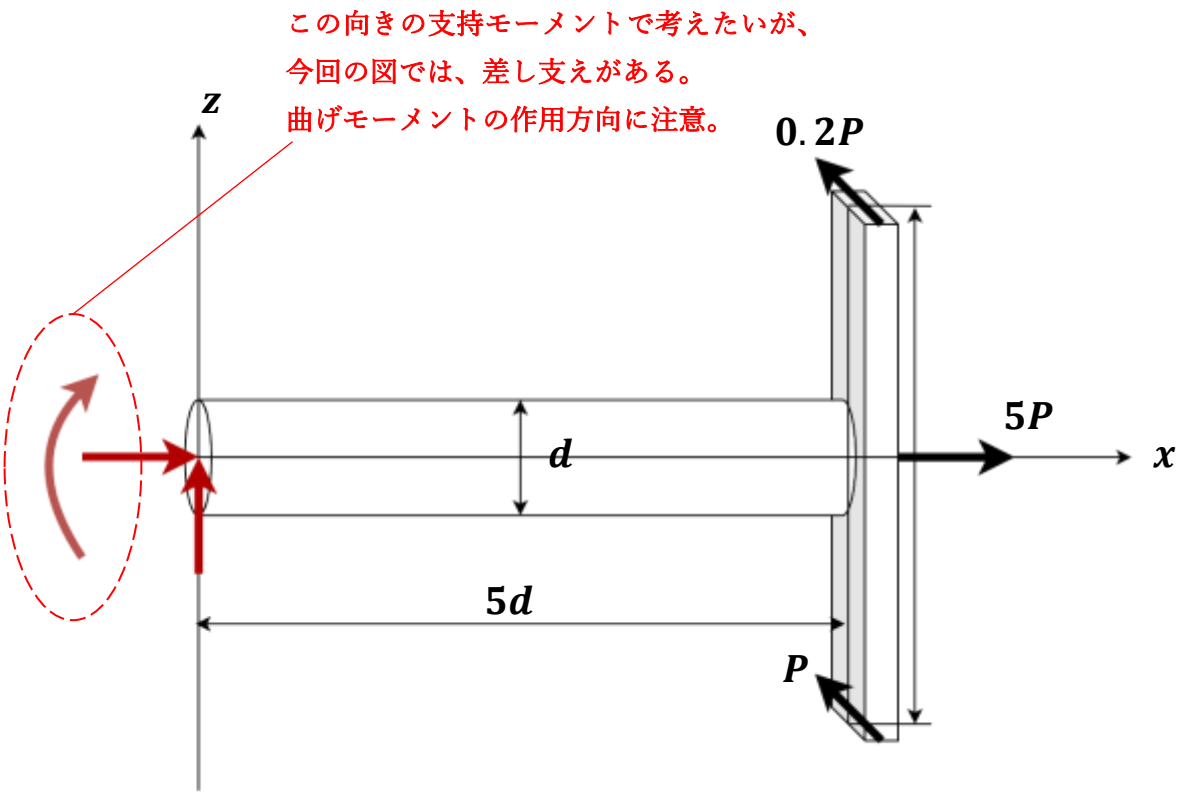
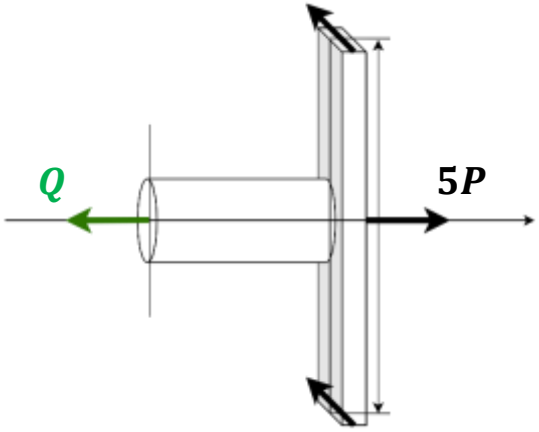


図 1-1

2019 年度【1】問題〈曲げ・ねじりの組合せ丸棒〉

（1）丸棒先端に作用する引張集中外力により、
丸棒断面（x 軸に垂直な断面）に作用する引張応力を求めなさい。



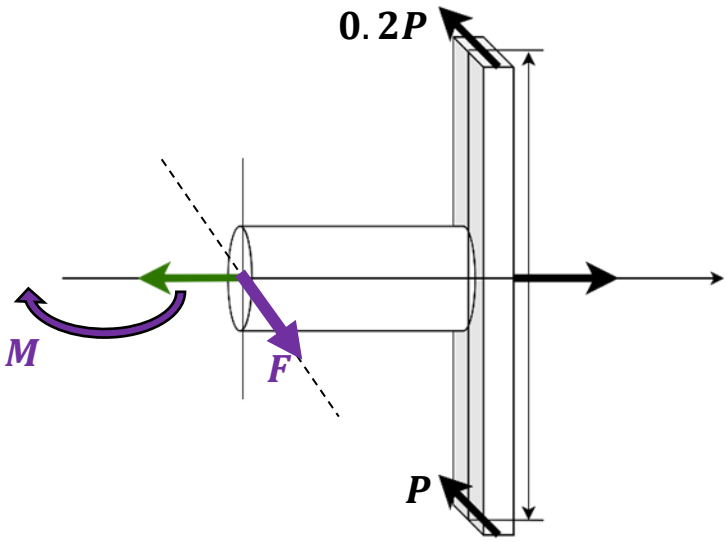
引張内力 Q は、x 軸方向の力のつり合いより、

$$\therefore Q = 5P \text{ [N]}$$

よって、断面積は $\pi d^2/4$ ゆえ、丸棒断面に作用する引張応力 σ は、

$$\therefore \sigma = \frac{20P}{\pi d^2} \text{ [MPa]}$$

（２）剛体板の先端に作用する集中外力により、丸棒固定端の表面上の
点 A（$(x,y,z)=(0,-d/2,0)$の位置）に作用する曲げ応力を求めなさい。



集中外力によるトルクによる丸棒に作用している**曲げモーメント**を求める。
せん断力 F は、y 軸方向の力のつり合いより、

$$F = 0.2P + P \quad \therefore F = 1.2P$$

また、支持モーメント M_O は、反時計回りを正とすると次式となる。

$$\therefore M_O = -(5d)\cdot(0.2P + 1.2P) = -6Pd$$

よって、**曲げモーメント $M(x)$** は、

$$M(x) = M_O + x\cdot F = -6Pd + 1.2Px \quad \therefore M(x) = 1.2P(x-5d)$$

丸棒の断面二次モーメント I と断面係数 Z は、直径を d として次式で表せる。

〈円形断面〉$I = \dfrac{\pi d^4}{64}, \quad Z = \dfrac{I}{d/2} = \dfrac{\pi d^3}{32}$

厚み方向での最大曲げ応力 $\sigma_{max}(x)$ は、中立軸から最も離れた位置で、次式となる。

$$\sigma_{max}(x) = \frac{|M(x)|}{Z} = \frac{32|M(x)|}{\pi d^3}$$

したがって、点 A $(x,y,z)=(0,-d/2,0)$ での曲げ応力 σ_A は、**引張方向**で、その大きさは、

$$\sigma_A = \sigma_{max}(0) = \frac{32|M(x)|}{\pi d^3} = \frac{32(6Pd)}{\pi d^3} = \frac{192P}{\pi d^2}$$

$$\therefore \sigma_A = \frac{192P}{\pi d^2}\ [\mathrm{MPa}]$$

（３）A 点と、z 軸について対称な丸棒固定端の表面上の点 A’を図 1-1 のようにとる。
A—A’線上における、x 軸方向の応力成分 σ_x の応力分布を図示しなさい。
応力分布図の特徴が分かるように必要な値を記述すること。

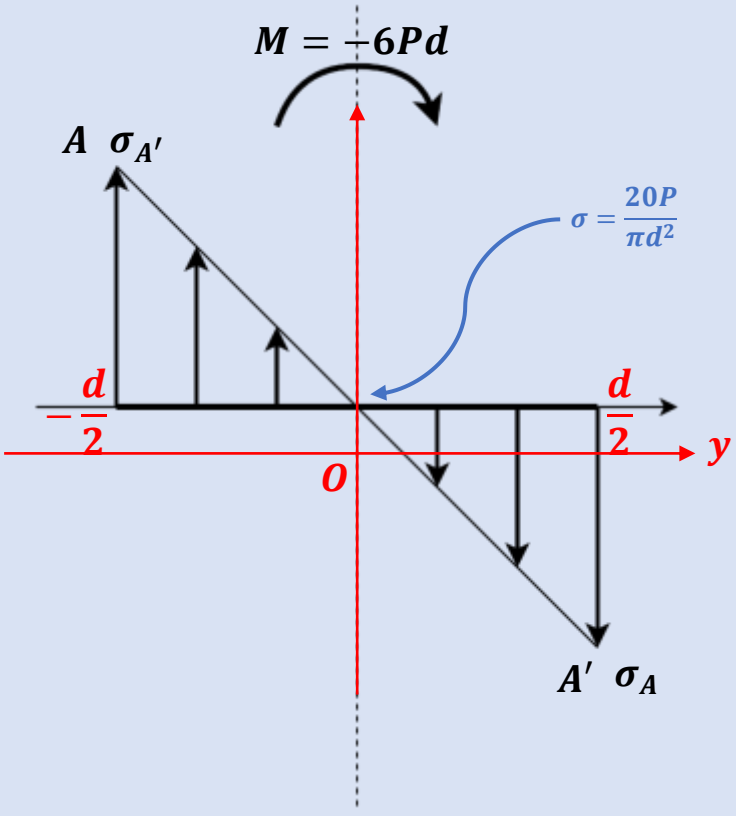
曲げ応力は、中立軸からの距離 y に比例して増大する。
（２）でも示したように、中立軸から最も離れた位置で最大となる。

下図のように**曲げモーメントが負の場合**には、**曲げ応力の応力分布図**は、

・はりの上面（$y = d/2$）点 A′ で最大の圧縮応力 $\sigma_{A'}$
・はりの下面（$y = -d/2$）点 A で最大の引張応力 σ_A

が生じる。

今回は、曲げ応力に加えて（１）で求めた一定の引張応力も組み合わさっている。
これを考慮すると、**曲げ応力の応力分布図**を、引張応力分だけ平行移動した形になる。



最大の引張応力

$$\sigma_{Max} = \frac{192P}{\pi d^2} + \frac{20P}{\pi d^2} = \frac{212P}{\pi d^2}$$

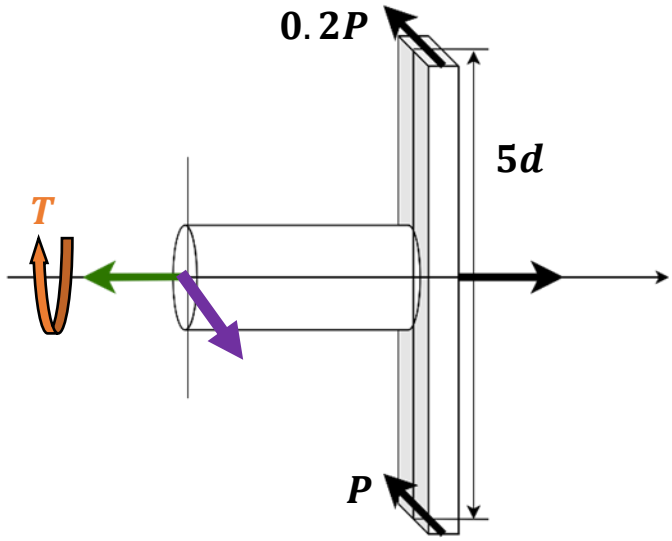
（４）剛体板の先端に作用する集中外力によるトルクによって生じる
点 A に生じるせん断応力を求めなさい。

丸棒の断面二次極モーメント I_p と極断面係数 Z_p は、直径を d として次式で表せる。

〈丸軸〉 $I_p = \dfrac{\pi d^4}{32}, \quad Z_p = \dfrac{I}{d/2} = \dfrac{\pi d^3}{16}$

ねじりによる最大せん断応力 $\tau_{max}(x)$ は、丸軸の表面の位置で、次式となる。

$$\tau_{max}(x) = \frac{|T(x)|}{Z_p} = \frac{16|T(x)|}{\pi d^3}$$



よって、点 O から x の位置での**ねじりモーメント：トルク** $T(x)$ は、

$$T(x) = -\left(\frac{5d}{2}\right)\cdot(0.2P) + \frac{5d}{2}\cdot P = 2Pd \quad \therefore T(x) = 2Pd$$

したがって、点 A $(x, y, z) = (0, -d/2, 0)$ でのせん断応力 τ_A の大きさは、

$$\tau_A = \tau_{max}(0) = \frac{16|T(x)|}{\pi d^3} = \frac{16(2Pd)}{\pi d^3} = \frac{32P}{\pi d^2}$$

$$\therefore \ \tau_A = \frac{32P}{\pi d^2} \ [\mathrm{MPa}]$$

（５）丸棒には軸力、曲げ、およびねじりが同時に作用する状態にある。
丸棒の材料の許容せん断応力を τ_{al} [MPa] とするとき、
軸の直径の二乗 d^2 が満たすべき条件式を求めなさい。

せん断応力 τ は、軸力・曲げ・ねじりの組合せ丸棒では、
① 軸力と曲げモーメント M による最大（引張曲げ）応力 σ_{max}
② ねじりモーメント（トルク T）の作用による最大せん断応力 τ_{max}
これらの合成応力を考慮して**最大せん断応力 $\boldsymbol{\tau_{MAX}}$** を求める必要がある。

$$\tau_{MAX} = \frac{1}{2}\sqrt{{\sigma_{max}}^2 + 4{\tau_{max}}^2}$$

（３）（４）を利用して、**最大せん断応力 $\boldsymbol{\tau_{MAX}}$** を求める。

$$\tau_{MAX} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{212P}{\pi d^2}\right)^2 + 4\left(\frac{32P}{\pi d^2}\right)^2}$$

$$\therefore \tau_{MAX} = \frac{2P}{\pi d^2}\sqrt{3065}$$

これが、許容せん断応力 τ_{al} 以下であればよい。

$$\frac{2P}{\pi d^2}\sqrt{3065} \leq \tau_{al}$$

$$\therefore d^2 \geq \frac{2\sqrt{3065}}{\pi\tau_{al}}P$$

2019（H31）年度【1】略解

（1）	$\sigma = \dfrac{20P}{\pi d^2}$ [MPa]
（2）	$\sigma_A = \dfrac{192P}{\pi d^2}$ [MPa]
（3）	略
（4）	$\tau_A = \dfrac{32P}{\pi d^2}$ [MPa]
（5）	$d^2 \geq \dfrac{2\sqrt{3065}}{\pi \tau_{al}} P$

2019（H31）年度【1】講評

軸力・曲げ・ねじりの組み合わせ問題で、やや解きづらい問いであった。 また、今回はあらかじめ座標が設定されていて、少し方向を考えにくい。

平成 31 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：材料力学　［ 2 / 2］

（問題［1］,［2］は，別々の答案用紙に解答すること.）

［2］

図 2-1 に示すように，点 A において固定支持された，はり AB の AC 間に，線形的に変化する分布外力（点 A における値を q_0 とする）が作用している．以下の問いに答えなさい．ただし，はりの曲げ剛性を EI とする．

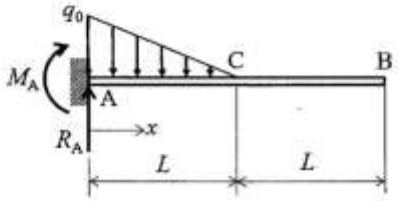


図 2-1

(1) AC 間に作用する分布外力 $q(x)$を，点 A からの距離 x を用いて表しなさい．
(2) 点 A における支持力 R_A および支持モーメント M_A を求めなさい．（図 2-1 に定義された方向を正として解答すること）
(3) AC 間に作用するせん断力 F_{AC} および曲げモーメント M_{AC}，CB 間に作用するせん断力 F_{CB} および曲げモーメント M_{CB} を求めなさい．
(4) AC 間のたわみ角θ_{AC}およびたわみ v_{AC} を，x を用いて表しなさい．
(5) 点 C におけるたわみ v_C，たわみ角θ_C を求めなさい．
(6) CB 間のたわみ角θ_{CB}およびたわみ v_{CB} を，x を用いて表しなさい．
(7) 点 B のたわみ v_{B1} を求めなさい．

次に図 2-2 に示すように，同じはりを点 B においてバネ定数 k の二つのバネで支持して，同じ分布外力を作用させたところ，点 B の鉛直下向き変位はδ_B になった．以下の問いに答えなさい．

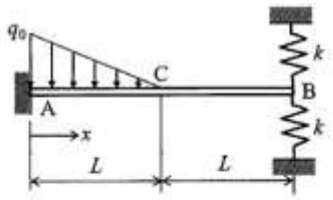


図 2-2

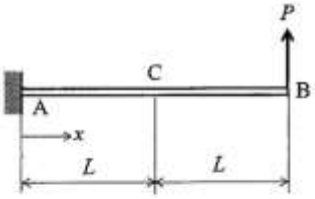


図 2-3

(8) ふたつのバネによる点 B の支持力を，上向きに作用する集中外力 P で表すとき，P を点 B の鉛直下向き変位δ_B およびバネ定数 k を用いて表しなさい．
(9) 図 2-3 に示すように，はり AB の点 B に，上向きの集中外力 P のみが作用する時の点 B のたわみ v_{B2} を求めなさい．
(10) 小問(7)，(8)および(9)の答えを利用して，点 B の変位δ_B を求めなさい．

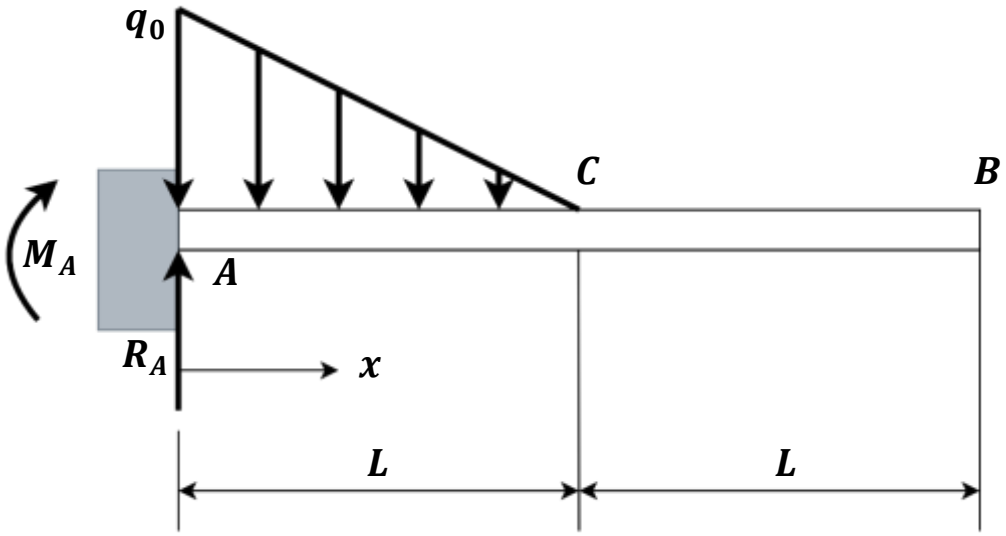


図 2-1

2019 年度【2】問題〈曲げによるたわみ〉

（1）AC 間に作用する分布外力 $q(x)$ を、点 A からの距離 x を用いて表しなさい。

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ q(L) = 0 \end{cases}$$

$$q(x) = q_0 - \frac{q_0}{L}x = q_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

（2）点 A における支持力 R_A および支持モーメント M_A を求めなさい。
（図 2-1 に定義された方向を正として解答すること）

自由体図において、鉛直方向の力のつり合いより、

$$R_A = \int q(x)dx = \int_0^L \left(q_0 - \frac{q_0}{L}x\right)dx = \left[q_0 x - \frac{q_0}{2L}x^2\right]_0^L = q_0 L - \frac{q_0}{2L}L^2 = q_0 L - \frac{q_0}{2}L^1$$

$$\therefore R_A = \frac{q_0}{2}L$$

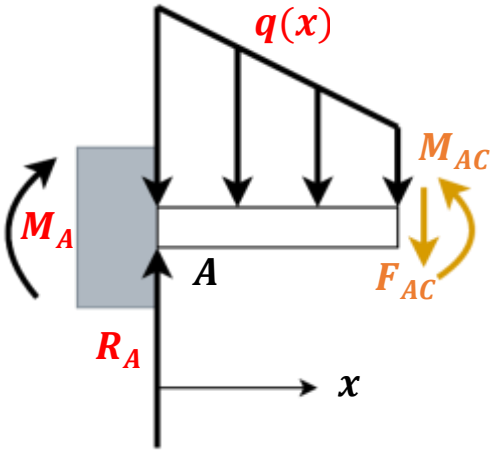
点 A における、力のモーメントのつり合いより、

$$M_A = -\int x \cdot q(x)dx = -\int_0^L x\left(q_0 - \frac{q_0}{L}x\right)dx = -\int_0^L \left(q_0 x - \frac{q_0}{L}x^2\right)dx$$

$$= -\left[\frac{q_0}{2}x^2 - \frac{q_0}{3L}x^3\right]_0^L = -\left(\frac{q_0}{2}L^2 - \frac{q_0}{3L}L^3\right) = -\frac{q_0}{2}L^2 + \frac{q_0}{3}L^2$$

$$\therefore M_A = -\frac{q_0}{6}L^2$$

（３）AC 間に作用するせん断力 F_{AC} および曲げモーメント M_{AC}，
CB間に作用するせん断力 F_{CB} および曲げモーメント M_{CB} を求めなさい。



〈AC 間〉AC 間のある位置 x を考える。
自由体図において、鉛直方向の力のつり合いより、

$$F_{AC} = R_A - \int q(x)\,dx = R_A - \int_0^x q(x)\,dx$$

（１）（２）より、$R_A, q(x)$ を代入する。

$$\therefore F_{AC} = \frac{q_0}{2}L - \left[q_0 x - \frac{q_0}{2L}x^2\right]_0^x = \frac{q_0}{2}L - q_0 x + \frac{q_0}{2L}x^2$$

$$\therefore F_{AC} = \frac{q_0}{2L}(x-2L)^2$$

点 A における、力のモーメントのつり合いより、

$$M_{AC} = M_A + x \cdot F_{AC} + \int_0^x x \cdot q(x)dx$$

（１）（２）より、$q(x), M_A$ を代入する。上で求めた F_{AC} も代入する。

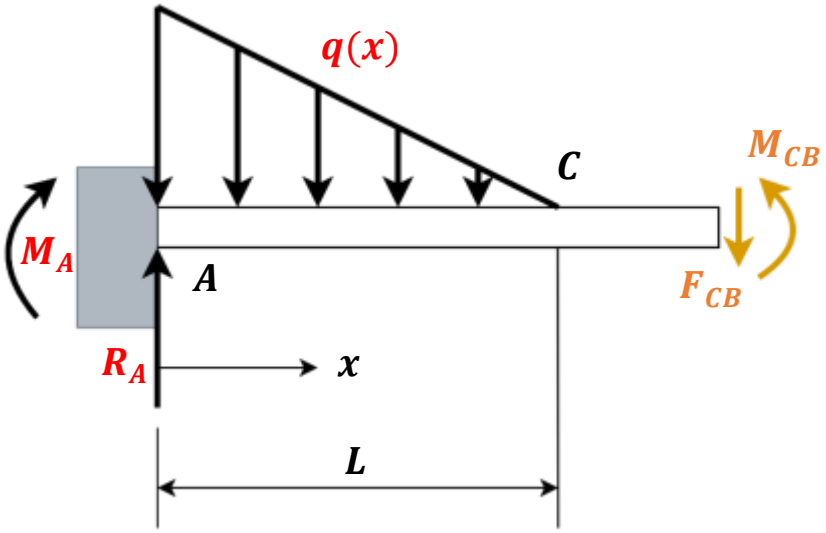
$$M_{AC} = -\frac{q_0}{6}L^2 + x\left(\frac{q_0}{2}L - q_0 x + \frac{q_0}{2L}x^2\right) + \left[\frac{q_0}{2}x^2 - \frac{q_0}{3L}x^3\right]_0^x$$

$$= -\frac{q_0}{6}L^2 + \left(\frac{q_0 L}{2}x - q_0 x^2 + \frac{q_0}{2L}x^3\right) + \frac{q_0}{2}x^2 - \frac{q_0}{3L}x^3$$

$$\therefore M_{AC} = -\frac{q_0}{6}L^2 + \frac{q_0 L}{2}x - \frac{q_0}{2}x^2 + \frac{q_0}{6L}x^3$$

$$\therefore M_{AC} = \frac{q_0}{6L}(x-L)^3$$

この後の積分計算を楽にするため、因数分解した形で表しておきたい。



〈CB 間〉CB 間のある位置 x を考える。

自由体図において、鉛直方向の力のつり合いより、

$$F_{CB} = R_A - \int_0^L q(x)dx$$

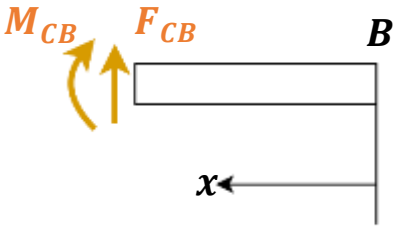
$$\therefore F_{CB} = 0$$

点 A における、力のモーメントのつり合いより、$F_{CB} = 0$ を考慮すると、

$$M_{CB} = M_A + \int_0^L x \cdot q(x)dx$$

$$\therefore M_{CB} = 0$$

点 B 基準で考えると、上の結果は明らか。



$$\therefore F_{CB} = 0$$

$$\therefore M_{CB} = 0$$

（４）AC 間のたわみ角 θ_{AC} およびたわみ v_{AC} を、x を用いて表しなさい。

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

（３）より、

$$-EI\frac{d^2v_{AC}}{dx^2} = M_{AC} = \frac{q_0}{6L}(x-L)^3$$

両辺を積分して、

$$-EI\frac{dv_{AC}}{dx} = \int \frac{q_0}{6L}(x-L)^3 dx$$

$$= \frac{q_0}{24L}(x-L)^4 + C_1 \qquad (1)$$

ふたたび、両辺を積分して、

$$-EIv_{AC} = \int \left\{\frac{q_0}{24L}(x-L)^4 + C_1\right\} dx$$

$$= \frac{q_0}{120L}(x-L)^5 + C_1 x + C_2 \qquad (2)$$

積分定数 C_1, C_2 を決定するため、点 A（$x=0$）における以下の境界条件を適用する。

$$x = 0 \text{ で} \qquad \frac{dv_{AC}}{dx} = 0, \quad \text{かつ} \quad v_{AC} = 0$$

上の条件と式(1),(2)より、

$$C_1 = -\frac{q_0}{24}L^3, \quad C_2 = \frac{q_0}{120}L^4$$

よって、

$$\therefore \theta_{AC} = \frac{dv_{AC}}{dx} = -\frac{q_0}{24EIL}(x-L)^4 + \frac{q_0}{24EI}L^3$$

$$\therefore v_{AC} = -\frac{q_0}{120EIL}(x-L)^5 + \frac{q_0}{24EI}L^3 x - \frac{q_0}{120EI}L^4$$

（５）点 C におけるたわみ v_C, たわみ角 θ_C を求めなさい。

（４）で求めた結果に $x = L$ を代入する。

$$\therefore v_C = \frac{q_0}{24EI}L^4 - \frac{q_0}{120EI}L^4 = \frac{q_0}{30EI}L^4$$

$$\therefore \theta_C = \frac{q_0}{24EI}L^3$$

（６）CB 間のたわみ角 θ_{CB} およびたわみ v_{CB} を、x を用いて表しなさい。

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

（３）より、

$$-EI\frac{d^2v_{CB}}{dx^2} = M_{CB} = 0$$

両辺を積分して、

$$-EI\frac{dv_{CB}}{dx} = -EI\theta_{CB} = C_3 \tag{3}$$

ふたたび、両辺を積分して、

$$-EIv_{CB} = C_3x + C_4 \tag{4}$$

積分定数 C_3, C_4 を決定するため、（５）の結果を境界条件として適用する。

（５）の結果と、式(3)より、

$$C_3 = -EI\theta_C = -\frac{q_0}{24}L^3$$

（５）の結果と、式(4)より、

$$C_4 = -EIv_C - C_3L = -\frac{q_0}{30}L^4 + \frac{q_0}{24}L^4 = \left(-\frac{4}{120} + \frac{5}{120}\right)\frac{q_0}{EI}L^4 = \frac{q_0}{120EI}L^4$$

よって、

$$\therefore \theta_{CB} = \frac{q_0}{24EI}L^3$$

$$\therefore v_{CB} = \frac{q_0}{24EI}L^3x - \frac{q_0}{120EI}L^4$$

（７）点 B でのたわみ v_{B1} を求めなさい。

（６）で求めた結果に $x = 2L$ を代入する。

$$v_{B1} = \frac{q_0}{12EI}L^4 - \frac{q_0}{120EI}L^4 = \frac{q_0L^4}{EI}\left(\frac{10}{120} - \frac{1}{120}\right)$$

$$\therefore v_{B1} = \frac{3q_0}{40EI}L^4$$

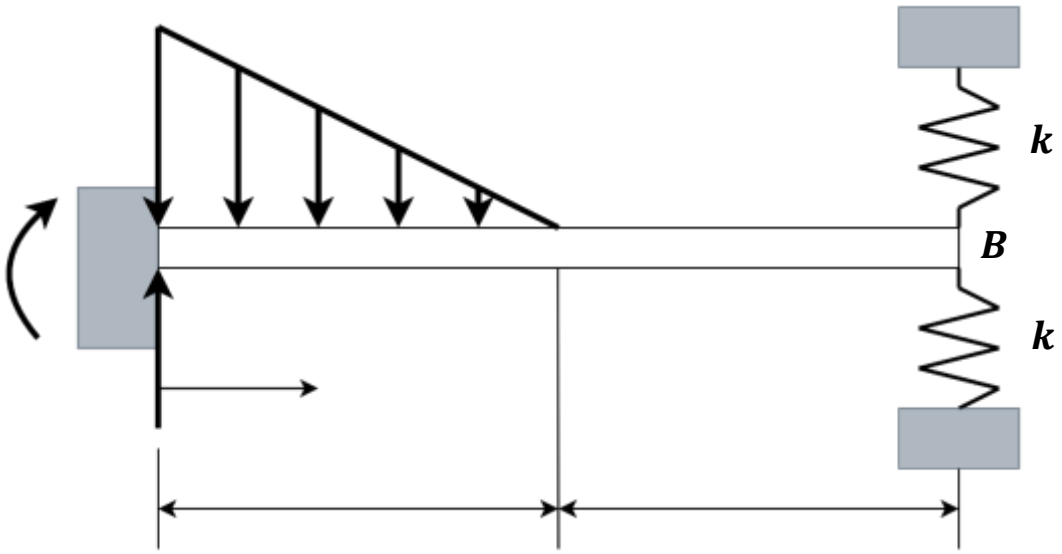


図 2-2

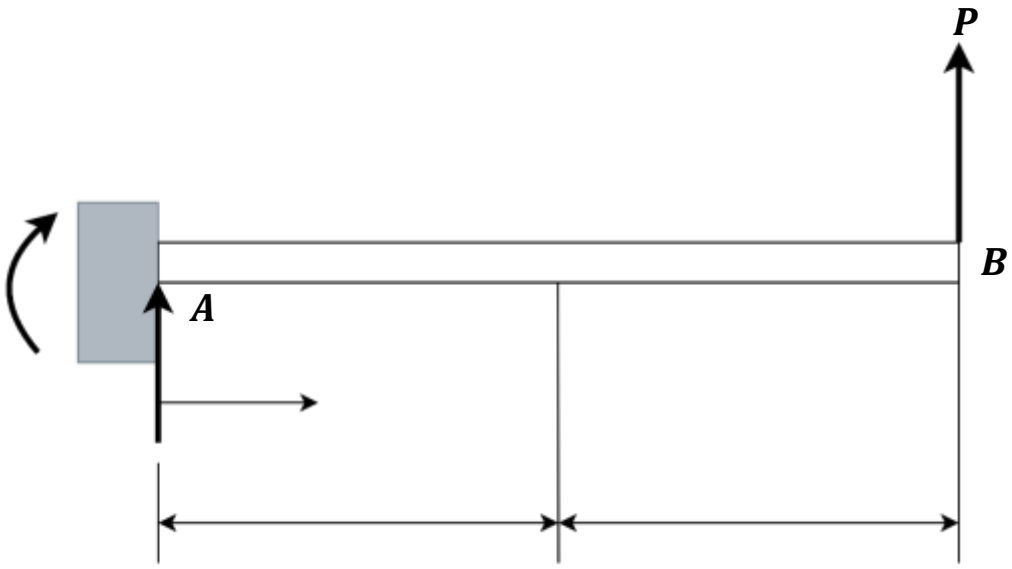
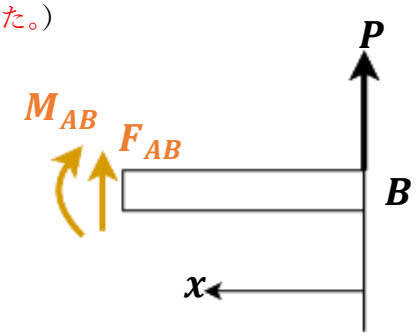


図 2-3

（8）２つのバネによる点 B の支持力を、上向きで作用する集中外力 P で表すとき、P を点 B の鉛直下向き変位 δ_B およびバネ定数 k を用いて表しなさい。
フックの法則より、 $P = 2k\delta_B$

（９）図 2-3 に示すように、はり AB の点 B に、上向きの集中外力 P のみが作用するときの点 B のたわみ v_{B2} を求めなさい。

〈CB 間〉CB 間のある位置 x を考える。（B を原点とした。）



自由体図において、鉛直方向の力のつり合いより

$$\therefore F_{AB} = -P$$

点 B における、力のモーメントのつり合いより、

$$\therefore M_{AB} = xF_{AB} = -Px$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

$$-EI\frac{d^2v_{AB}}{dx^2} = M_{AB} = -Px$$

両辺を積分して、

$$-EI\frac{dv_{AB}}{dx} = -\frac{P}{2}x^2 + C_5 \tag{5}$$

ふたたび、両辺を積分して、

$$-EIv_{AC} = -\frac{P}{6}x^3 + C_5x + C_6 \tag{6}$$

積分定数 C_5, C_6 を決定するため、点 A（$x = 2L$）における以下の条件を適用する。

$$x = 2L \text{ で} \qquad \frac{dv_{AB}}{dx} = 0\,, \quad \text{かつ} \quad v_{AB} = 0$$

上の条件と式(1),(2)より、

$$C_5 = \frac{P}{2}(2L)^2 = 2PL^2$$

$$C_6 = \frac{P}{6}(2L)^3 - C_5(2L) = \frac{P}{6}(2L)^3 - 2PL^2(2L) = \frac{4PL^3}{3} - 4PL^3 = -\frac{8PL^3}{3}$$

よって、

$$\therefore v_{AB} = -\frac{1}{EI}\left(-\frac{P}{6}x^3 + 2PL^2x - \frac{8PL^3}{3}\right)$$

したがって、$x = 0$ を代入すると、

$$\therefore v_{B2} = \frac{8P}{3EI}L^3$$

上向きの集中外力 P のみが作用するときの点 B のたわみは鉛直上向きに変位している。

（１０）小問（７）（８）および（９）の答えを利用して、点 B の変位 δ_B を求めなさい。

点 B の変位 δ_B を、「重ね合わせの原理」を用いて求める。

δ_B は点 B の鉛直下向き変位であることに注意して、

$$\delta_B = \frac{3q_0}{40EI}L^4 - \frac{8PL^3}{3EI}$$

（８）より、$P = 2k\delta_B$ を代入すると、

$$\delta_B = \frac{3q_0}{40EI}L^4 - \frac{16k\delta_B L^3}{3EI}$$

$$\delta_B\left(1 + \frac{16kL^3}{3EI}\right) = \frac{3q_0}{40EI}L^4$$

$$\frac{3EI + 16kL^3}{3EI}\delta_B = -\frac{3q_0}{40EI}L^4$$

$$\therefore \delta_B = \frac{9q_0L^4}{40(3EI + 16kL^3)}$$

2019（H31）年度【２】略解

（１）	$q(x) = q_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)$
（２）	$R_A = \frac{q_0}{2}L, \quad M_A = -\frac{q_0}{6}L^2$
（３）	$F_{AC} = \frac{q_0}{2L}(x-2L)^2, \quad M_{AC} = \frac{q_0}{6L}(x-L)^3$ $F_{CB} = 0, \quad M_{CB} = 0$
（４）	$\theta_{AC} = -\frac{q_0}{24EIL}(x-L)^4 + \frac{q_0}{24EI}L^3$ $v_{AC} = -\frac{q_0}{120EIL}(x-L)^5 + \frac{q_0}{24EI}L^3x - \frac{q_0}{120EI}L^4$
（５）	$v_C = \frac{q_0}{30EI}L^4, \quad \theta_C = \frac{q_0}{24EI}L^3$
（６）	$\theta_{CB} = \frac{q_0}{24EI}L^3$ $v_{CB} = \frac{q_0}{24EI}L^3x - \frac{q_0}{120EI}L^4$
（７）	$v_{B1} = \frac{3q_0}{40EI}L^4$
（８）	$P = 2k\delta_B$
（９）	$v_{B2} = \frac{8P}{3EI}L^3$
（１０）	$\delta_B = \frac{9q_0L^4}{40(3EI + 16kL^3)}$

2019（H31）年度【２】講評

たわみに関する基本的な問い。誘導は丁寧だが、計算が大変。計算ミスる自信しかない。