2020 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：材料力学　［1 / 2］

（問題[1]，[2]は別々の答案用紙に解答すること．）

[1]

図 1-1 に示すように二種類の材料から構成される中実丸棒と円筒が，中心軸が一致するように，剛体壁に固定されている．中実丸棒の先端には剛体板が接合されている．中実丸棒の先端が円筒の縁からδだけとび出している．AC 部および CB 部のヤング率，線膨張係数はそれぞれ E_1，α_1 および E_2，α_2 であり，円筒のヤング率，線膨張係数は E_3，α_3 である．中実丸棒および円筒の断面は長手方向である x 軸方向で一様で，断面積はともに S である．与えられた記号のみを用いて，以下の問いに答えなさい．解答は答案用紙の右側欄の所定の場所に記入し，左側空欄に導出過程を記述すること．

(1) 図 1-1 のように剛体板に集中外力 F を作用させ，図 1-2 に示すように中実丸棒に縮みλを与えた．中実丸棒をδだけ圧縮させるのに必要な集中外力の大きさ P を求めなさい．

(2) (1)から，さらに中実丸棒を圧縮させたとき，中実丸棒をδ'だけ圧縮させるのに必要な集中外力の大きさ P' を求めなさい．

(3) 円筒と剛体板が接している状態で，円筒と剛体板を接合し，集中外力 F を取り除いた．このときの中実丸棒の先端 B の位置 x を，図 1-1 のように初期状態の位置を x 軸の原点とした座標系で示しなさい．

(4) 円筒と剛体板を接合させ，集中外力 F を取り除いた状態で，全体の温度を ΔT だけ上昇させた．このとき中実丸棒の AC 部の断面に生じている応力 σ_{AC} を求めなさい．

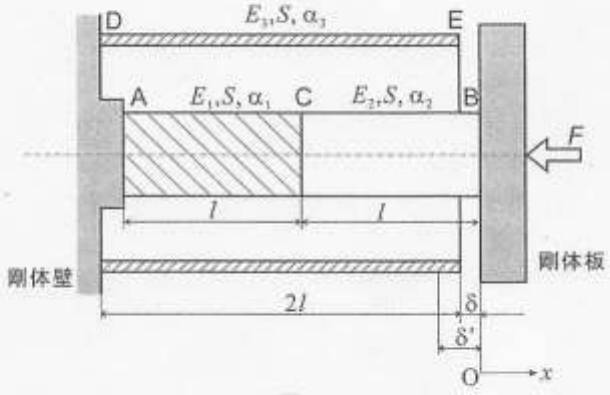


図1-1

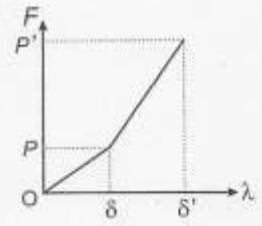
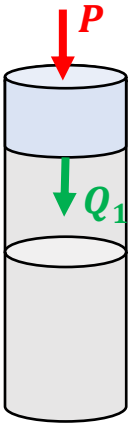


図1-2

2020（R2）年度【１】問題〈組合せ棒の圧縮〉

（１）図 1-1 のように剛体板に集中外力 F を作用させ、
図 1-2 に示すように中実丸棒に縮み λ を与えた。
中実丸棒を δ だけ圧縮させるのに必要な集中外力の大きさ P を求めなさい。

圧縮外力の大きさ P を加えたとき、長さ l の一様断面積の丸棒では、内力 $Q_1 = -P$ ゆえ、**縮み**は次式で表せる。



$$\delta = \frac{-Q_1 l}{ES} = \frac{Pl}{ES}$$

よって、二種類の中実丸棒の縮みを考慮して、

$$\delta = \frac{Pl}{E_1 S} + \frac{Pl}{E_2 S} = \frac{Pl}{S}\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)$$

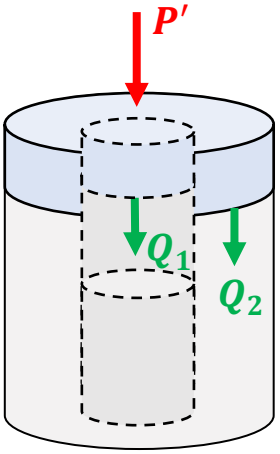
$$\therefore \delta = \frac{Pl}{S}\left(\frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}\right)$$

$$\therefore P = \frac{S}{l}\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}\delta$$

（２）（１）から、さらに中実丸棒を圧縮させたとき、
中実丸棒を δ' だけ圧縮させるのに必要な集中外力の大きさ P' を求めなさい。

丸棒と円筒に生じる内力をそれぞれ Q_1, Q_2 とすると、力のつり合いの式は次式となる。

$$Q_1 + Q_2 + P' = 0$$



（１）より、**縮み**はそれぞれ次式で表せる。

$$\delta' = \frac{-Q_1 l}{S}\left(\frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}\right)$$

$$\delta' - \delta = \frac{-Q_2 \cdot 2l}{E_3 S}$$

上式をつり合い式に代入して、

$$-\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}\frac{S}{l}\delta' - E_3\frac{S}{2l}(\delta' - \delta) + P' = 0$$

$$\therefore P' = \frac{S}{l}\frac{2E_1 E_2 \delta' + E_3(E_1 + E_2)(\delta' - \delta)}{2(E_1 + E_2)}$$

（3）円筒と剛体板が接している状態で、円筒と剛体板を接合し、
集中外力 F を取り除いた。このときの中実丸棒の先端Bの位置 x を、
図 1-1 のように初期状態の位置を x 軸の原点とした座標系で示しなさい。

丸棒と円筒に生じる内力をそれぞれ Q_1, Q_2 とすると、力のつり合いの式は次式となる。

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

よって、不静定問題ゆえ、**中実丸棒と円筒の長さが等しくなる条件**を考える。

丸棒と円筒の伸びをそれぞれ δ_1, δ_2 とすると、

$$\delta_1 + \delta = \delta_2$$

ここで（1）より、伸びは次式で表せる。

$$\begin{cases} \delta_1 = \dfrac{Q_1 l}{S}\left(\dfrac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}\right) \\ \delta_2 = \dfrac{Q_2 \cdot 2l}{E_3 S} \end{cases}$$

上の条件式とつり合い式より、Q_2 を求める。（勿論、Q_1 を求めてもよい）

$$\frac{-Q_2 l}{S}\left(\frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}\right) + \delta = \frac{Q_2 \cdot 2l}{E_3 S}$$

$$\{(E_1 + E_2)E_3 + 2E_1 E_2\}Q_2 = \frac{S}{l} E_1 E_2 E_3 \delta$$

$$\therefore Q_2 = \frac{S}{l} \frac{E_1 E_2 E_3}{2E_1 E_2 + E_2 E_3 + E_3 E_1} \delta$$

したがって、円筒の伸び δ_2 は、（勿論、δ_1 を求めてもよい）

$$\therefore \delta_2 = \frac{2E_1 E_2}{2E_1 E_2 + E_2 E_3 + E_3 E_1} \delta$$

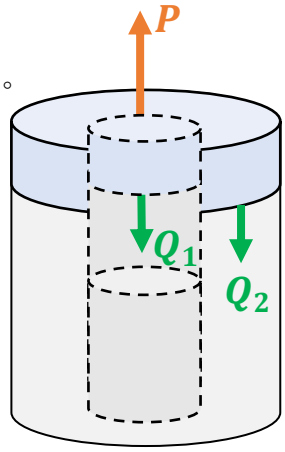
このときの中実丸棒の先端Bの位置 x は、円筒の先端Eの位置と考えてもよい。

$$x = -\delta + \delta_2$$

$$= -\delta + \frac{2E_1 E_2}{2E_1 E_2 + E_2 E_3 + E_3 E_1} \delta$$

$$\therefore x = -\frac{E_2 E_3 + E_3 E_1}{2E_1 E_2 + E_2 E_3 + E_3 E_1} \delta$$

【別解】重ね合わせ法による残留応力の解き方



圧縮外力の大きさ P を加え、丸棒の長さと円筒を等しくする。

このとき圧縮力は丸棒にのみ作用する。

（1）より、

$$\therefore P = \frac{S}{l}\frac{E_1E_2}{E_1+E_2}\delta$$

円筒と剛体板を接合し、圧縮外力 F を取り除くことは、

圧縮外力を打ち消す引張外力 F を加えることと同義である。

この引張外力による、外力が作用していない状態で発生する「残留応力」を求める。

（2）より、

$$\therefore Q_1 = \frac{2E_1E_2}{2E_1E_2 + E_2E_3 + E_3E_1}P$$

これらの圧縮応力と引張応力を重ね合わせる。

$$\sigma_1 = -\frac{P}{S} + \frac{Q_1}{S}$$

$$= -\frac{P}{S}\left(1 - \frac{2E_1E_2}{2E_1E_2 + E_2E_3 + E_3E_1}\right)$$

$$= -\frac{1}{l}\frac{E_1E_2}{E_1+E_2}\frac{E_2E_3+E_3E_1}{2E_1E_2 + E_2E_3 + E_3E_1}\delta$$

よって、中実丸棒の伸び δ_1 は、

$$\delta_1 = \frac{\sigma_1}{E_1}l + \frac{\sigma_1}{E_2}l = \frac{E_1+E_2}{E_1E_2}l\sigma_1$$

$$= -\frac{E_2E_3+E_3E_1}{2E_1E_2 + E_2E_3 + E_3E_1}\delta$$

したがって、中実丸棒の先端Bの位置 x は、

$$\therefore x = \delta_1 = -\frac{E_2E_3 + E_3E_1}{2E_1E_2 + E_2E_3 + E_3E_1}\delta$$

※ 誘導に乗って、重ね合わせ法で答える方が賢明か。

（4）円筒と剛体板を接合させ、集中外力 F を取り除いた状態で、
全体の温度を ΔT だけ上昇させた。
このとき中実丸棒の AC 部の断面に生じている応力 σ_{AC} を求めなさい。

丸棒および円筒の両端が剛体板で固定されていないとき、

温度上昇によって発生する伸びは、次式となる。

$$\delta = \alpha \Delta T l$$

また、丸棒と円筒に生じる内力をそれぞれ Q_1, Q_2 とすると、

力のつり合いの式は次式となる。

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

よって、不静定問題ゆえ、**中実丸棒と円筒の長さが等しくなる条件**を考える。

丸棒と円筒の伸びをそれぞれ δ_1, δ_2 とすると、

$$\delta_1 + \delta = \delta_2$$

ここで（1）より、内力による伸びは次式で表せる。

$$\begin{cases} \delta_1 = \dfrac{Q_1 l}{S}\left(\dfrac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}\right) \\ \delta_2 = \dfrac{Q_2 \cdot 2l}{E_3 S} \end{cases}$$

丸棒と円筒の「**温度上昇による伸び**」を考慮して、

$$\delta_1 + \alpha_1 \Delta T l + \alpha_2 \Delta T l + \delta = \delta_2 + \alpha_3 \Delta T \cdot 2l$$

上の条件式とつり合い式より、Q_1 を求める。

$$\frac{Q_1 l}{S}\left(\frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}\right) + \alpha_1 \Delta T l + \alpha_2 \Delta T l + \delta = \frac{-Q_1 \cdot 2l}{E_3 S} + \alpha_3 \Delta T \cdot 2l$$

$$\frac{l}{S}\left(\frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} + \frac{2}{E_3}\right) Q_1 = l(-\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3)\Delta T - \delta$$

$$\frac{l}{S}\frac{2E_1 E_2 + E_3(E_1 + E_2)}{E_1 E_2 E_3} Q_1 = l(-\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3)\Delta T - \delta$$

$$\therefore Q_1 = -\frac{E_1 E_2 E_3 \{(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) l \Delta T + \delta\}}{2E_1 E_2 + E_2 E_3 + E_3 E_1}\frac{S}{l}$$

$$\therefore \sigma_{AC} = \frac{Q_1}{S} = -\frac{E_1 E_2 E_3 \{l(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3)\Delta T + \delta\}}{(2E_1 E_2 + E_2 E_3 + E_3 E_1) l}$$

2020（R2）年度【１】略解

（１）	$P = \dfrac{S}{l}\dfrac{E_1E_2}{E_1+E_2}\delta$
（２）	$P' = \dfrac{S}{l}\dfrac{2E_1E_2\delta' + E_3(E_1+E_2)(\delta'-\delta)}{2(E_1+E_2)}$
（３）	$x = -\dfrac{E_2E_3+E_3E_1}{2E_1E_2+E_2E_3+E_3E_1}\delta$
（４）	$\sigma_{AC} = -\dfrac{E_1E_2E_3\{l(\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3)\Delta T+\delta\}}{(2E_1E_2+E_2E_3+E_3E_1)l}$

2020（R2）年度【１】講評

組合せ棒の圧縮に関する基本的な問いである。不静定問題は変形の適合性を考える。
重ね合わせ法の適用は慣れておきたい。熱応力の公式も覚えておきたい。

2020 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：材料力学　［2/2］

(問題[1],[2]は別々の答案用紙に解答すること)

[2] 図 2(a)に示すような幅 W, 厚さ t, 縦弾性係数 E の帯板を破線の位置で直角に折曲げて，(b)に示すような形状にした．点 A および点 F に図 2(b)の向きに力 P を作用させたとき，与えられた記号のみを用いて以下の問いに答えなさい．ただし，せん断応力による変形は無視し，曲げと軸力のみによる変形を考えること．また，座屈は生じないものとする．解答用紙には，導出過程も示すこと．

(1) AB 間に作用する応力を x の関数として表しなさい．
(2) BC 間に作用する曲げモーメントを x の関数として表しなさい．
(3) CD 間に作用する曲げモーメントを x の関数として表しなさい．
(4) 力 P を作用させたことによる AF 間の距離の増加量を求めなさい．
(5) CD 間の中点 O における最大ひずみを求めなさい．

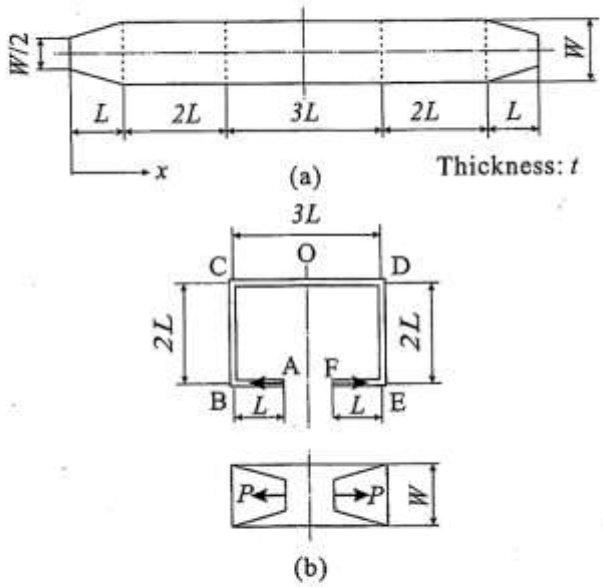


図 2

2020（R2）年度【２】問題〈ラーメン構造〉

（１）AB 間に作用する応力を x の関数として表しなさい。

AB 断面は長方形で、厚みが t なので、面積 $S(x)$ は,

$$\begin{cases} S(0) = t \cdot \dfrac{W}{2} \\ S(L) = tW \end{cases}$$

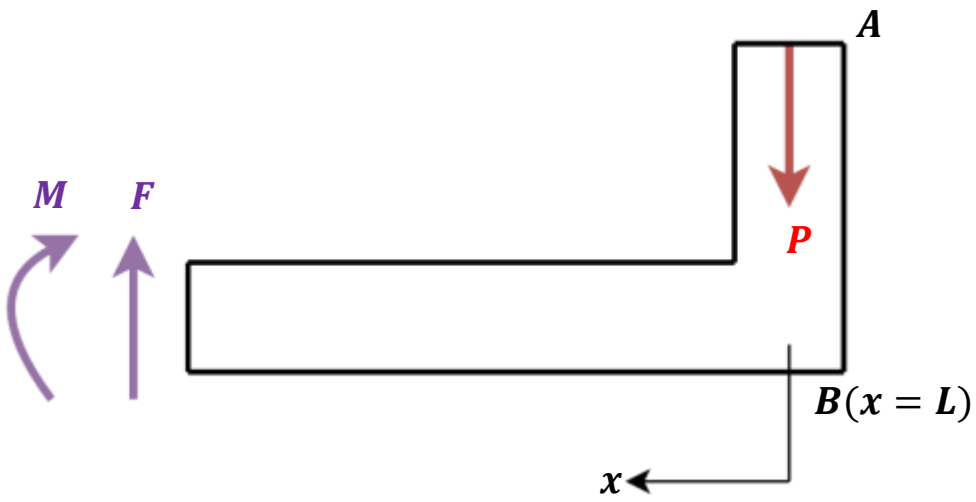
$$S(x) = \frac{tW}{2} + \frac{tW}{2L}x = \frac{tW}{2}\left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

AB 間に作用する応力 $\sigma_{AB}(x)$ は、圧縮応力で、

$$\sigma_{AB}(x) = \frac{Q}{S(x)} = \frac{-P}{\frac{tW}{2}\left(1 + \frac{x}{L}\right)}$$

$$\therefore \sigma_{AB}(x) = -\frac{2PL}{tW(x+L)}$$

（２）BC 間に作用する曲げモーメントを x の関数として表しなさい。



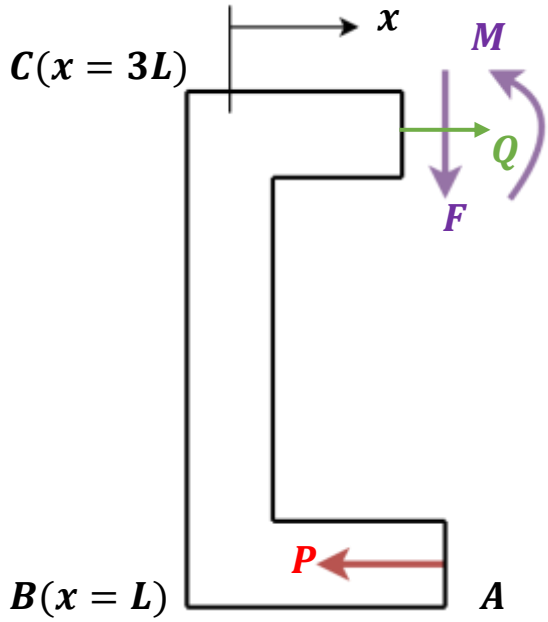
モーメントのつり合いの式を立式する。

BC 間に作用する曲げモーメント $M_{BC}(x)$は、$L \le x \le 3L$ の範囲で次式となる。

$$M_{BC}(x) = -(x - L) \cdot P$$

$$\therefore M_{BC}(x) = -P(x - L)$$

（3）CD 間に作用する曲げモーメントを x の関数として表しなさい。



モーメントのつり合いの式を立式する。

CD 間に作用する曲げモーメント $M_{CD}(x)$は、$3L \leq x \leq 6L$ の範囲で次式となる。

$$\therefore M_{CD}(x) = 2PL$$

（CD 間に作用する軸力 Q は $Q = P$ ）

（4）力 P を作用させたことによる AF 間の距離の増加量を求めなさい。

AB・EF 間の圧縮の軸力、BC・DE 間での曲げ、CD 間の曲げと軸力を考える。（対称性）

〈カスチリアーノの定理〉

① 軸力 Q だけが作用する場合

$$U = \int \frac{Q^2}{2EA} dx, \quad \delta = \frac{\partial U}{\partial Q}$$

② トルク T だけが作用する場合

$$U = \int \frac{T^2}{2GI_p} dx, \quad \varphi = \frac{\partial U}{\partial T}$$

③ 曲げモーメント M だけが作用する場合

$$U = \int \frac{M^2}{2EI} dx, \quad \theta = \frac{\partial U}{\partial M}$$

ひずみエネルギーUは、軸力によるU_1と曲げモーメントによるU_2の和であるので、

$$U = U_1 + U_2$$

ここで、対称性よりAB間とEF間に蓄えられる軸力によるひずみエネルギーは等しい。
また、同様に、BC間とDE間に蓄えられる曲げによるひずみエネルギーは等しい。

（1）（3）より、軸力によるひずみエネルギーU_1は、

$$U_1 = 2\int_0^L \frac{P^2 L}{EtW(x+L)}dx + \int_{3L}^{6L} \frac{P^2}{2EtW}dx$$

（2）（3）より、曲げモーメントによるひずみエネルギーU_2は、

$$U_2 = 2\int_L^{3L} \frac{P^2(x-L)^2}{2EI_{BC}}dx + \int_{3L}^{6L} \frac{4P^2L^2}{2EI_{CD}}dx$$

長方形棒の断面二次モーメントIは、幅をb,高さをhとして次式で表せる。

〈長方形断面〉$I = \dfrac{bh^3}{12}$

ここで、BC間およびCD間の断面二次モーメントは、

$$I_{BC} = I_{CD} = \frac{Wt^3}{12}$$

これを代入して、式を整理すると、

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ &= 2\int_0^L \frac{P^2 L}{EtW(x+L)}dx + 12\int_L^{3L} \frac{P^2(x-L)^2}{EWt^3}dx + \int_{3L}^{6L}\left(\frac{P^2}{2EtW} + \frac{24P^2L^2}{EWt^3}\right)dx \\ &= \frac{2P^2L}{EtW}[\ln(x+L)]_0^L + \frac{4P^2}{EWt^3}[(x-L)^3]_L^{3L} + \left(\frac{P^2}{2EtW} + \frac{24P^2L^2}{EWt^3}\right)[x]_{3L}^{6L} \\ &= \frac{2P^2L}{EtW}\ln 2 + \frac{32P^2}{EWt^3}L^3 + \left(\frac{3P^2L}{2EtW} + \frac{72P^2L^3}{EWt^3}\right) = \frac{t^2L(4\ln 2 + 3) + 208L^3}{2EWt^3}P^2 \end{aligned}$$

AF間の距離の増加量は、対称性より水平方向（荷重Pの作用方向）の変位δだけを考えればよい。よって、カスチリアーノの定理より、荷重Pの作用方向変位δは、

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{t^2L(4\ln 2 + 3) + 208L^3}{EWt^3}P$$

（5）CD 間の中点Oにおける最大ひずみを求めなさい。

CD 間には、軸力による応力と曲げによる曲げ応力の 2 つの垂直応力が作用する。

垂直ひずみ ε は、フックの法則より次式で求められる。

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

ここで、垂直応力を σ, ヤング率を E とする。

曲げ応力は次式となる。中立軸からの距離を y , 断面二次モーメントを I とする。

$$\sigma = \frac{M}{I}y$$

→ 中立軸からもっとも離れた位置で最大の曲げ応力が生じる。

長方形棒の断面二次モーメント I と断面係数 Z は、幅を b, 高さを h として、

〈長方形断面〉 $I = \frac{bh^3}{12}, \quad Z = \frac{I}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$

厚み方向での最大曲げ応力 $\sigma_{max}(x)$ は、中立軸から最も離れた位置で、次式となる。

$$\sigma_{max}(x) = \frac{|M(x)|_{Max}}{Z} = \frac{6|M(x)|_{Max}}{bh^2}$$

（3）（4）で求めた結果を利用すると、CD 間における応力の最大値は、

$$\sigma = \frac{P}{tW} + \frac{12PL}{Wt^2}$$

よって、ひずみは、

$$\therefore \varepsilon = \frac{t + 12L}{EWt^2}P$$

2020（R2）年度【２】略解

（１）	$\sigma_{AB}(x) = -\dfrac{2PL}{tW(x+L)}$
（２）	$M_{BC}(x) = -P(x-L)$
（３）	$M_{CD}(x) = 2PL$
（４）	$\delta = \dfrac{t^2L(4\ln 2 + 3) + 208L^3}{EWt^3}P$
（５）	$\varepsilon = \dfrac{t+12L}{EWt^2}P$

2020（R2）年度【２】講評

図をしっかりと描いて、曲げの方向を混乱しないようにしたい。

応力には、垂直応力かせん断応力かという分類のほかに、
軸力による垂直応力か曲げモーメントによる垂直応力（曲げ応力）かという分類がある。

一般に、曲げ応力の最大値を考える場合、曲げモーメントが x の関数であるときは、
単に中立軸から最も離れた位置（棒表面）で最大値を取るということではなく、
どの x の位置で曲げモーメントが最大となっているかを考える必要がある。
（５）本題は曲げモーメントが一定であったため、その考慮は必要なかったわけである。