令和３年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：材料力学　［1/2］

（問題[1]，[2]は別々の答案用紙に解答すること．）

[1]　図 1-1 に示すように点 A において固定支持された，はり AB の点 C に集中外力 P が作用している．以下の問いに答えなさい．ただし，はりの曲げ剛性を EI とする．

(1) 点 A における支持力 R_A および支持モーメント M_A を求めなさい．（図 1-1 に定義された方向を正として解答すること．）

(2) AB 間に作用するせん断力 F および曲げモーメント M を求めなさい．

(3) AB 間のたわみ角θおよびたわみ v を，x を用いて表しなさい．

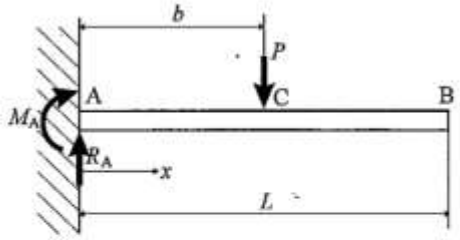


図1-1

次に，図 1-2 に示すように，図 1-1 と同じはり AB の AB 間に移動支持された点を設ける場合を考える．移動支持の位置を $0<a<L$ の範囲で移動させるとき，以下の問いに答えなさい．

(4) 移動支持が AC 間にある場合，および CB 間にある場合それぞれについて，移動支持された点 D における支持力 R_D をそれぞれ求めなさい．

(5) 次の(i), (ii)の場合における点 B のたわみ v_B を，b を用いて表しなさい．

(i)　$L=2b$，$a=\frac{1}{3}b$

(ii)　$L=3b$，$a=2b$

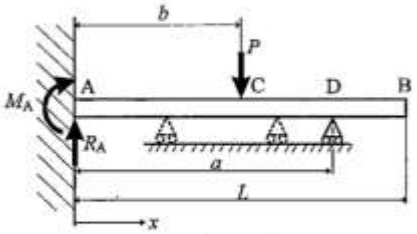


図1-2

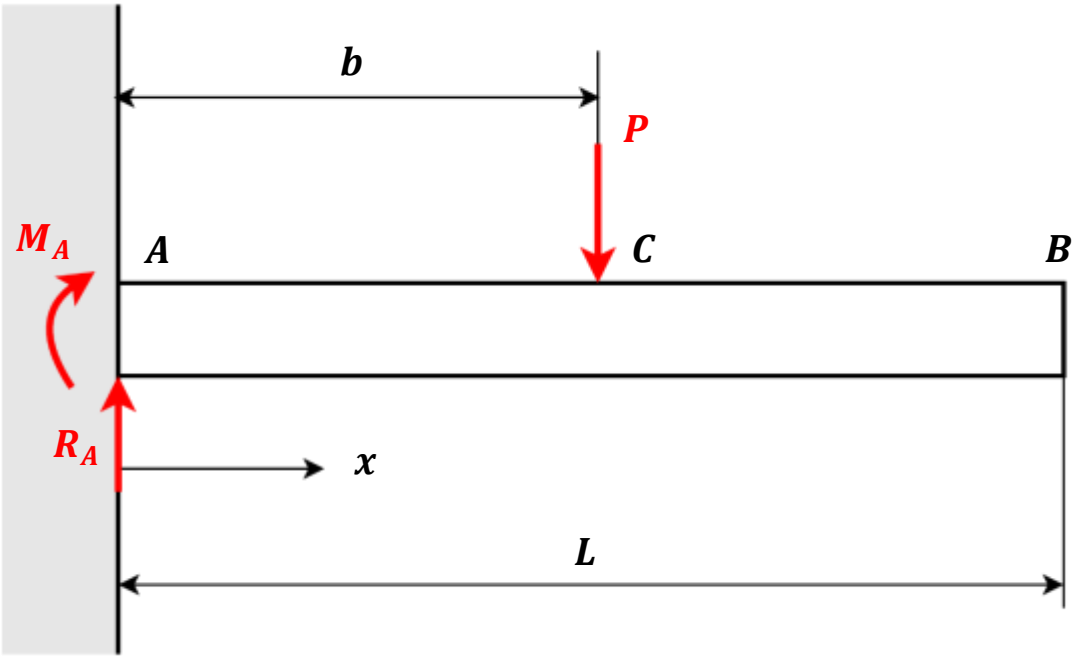


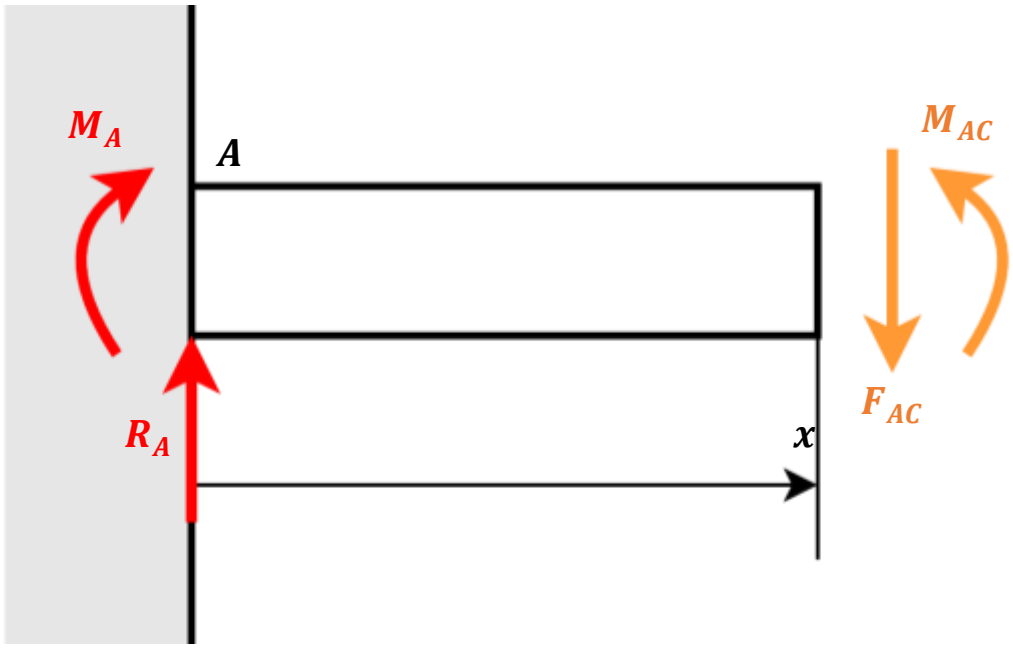
図 1-1

2021（R3）年度【1】問題〈曲げによるたわみ〉

【1】図 1-1 に示すように点 A において固定支持された、はり AB の点 C に集中外力 P が作用している。以下の問いに答えなさい。ただし、はりの曲げ剛性を EI とする。
（1）点 A における支持力 R_A および支持モーメント M_A を求めなさい。 （図 1-1 に定義された方向を正として解答すること。）
自由体図において、鉛直方向の力のつり合いより、 $\therefore R_A = P$ 点 A における、力のモーメントのつり合いより、 $\therefore M_A = -Pb$

（2）AB 間に作用するせん断力 F および曲げモーメント M を求めなさい。

〈AC 間〉$0 \leq x \leq b$ と〈CB 間〉$b \leq x \leq L$ に分けて考える。



〈AC 間〉AC 間のある位置 x を考える。

自由体図において、鉛直方向の力のつり合いより、

$$F_{AC} = R_A$$

（1）より、R_Aを代入する。

$$\therefore F_{AC} = P$$

点 A における、力のモーメントのつり合いより、

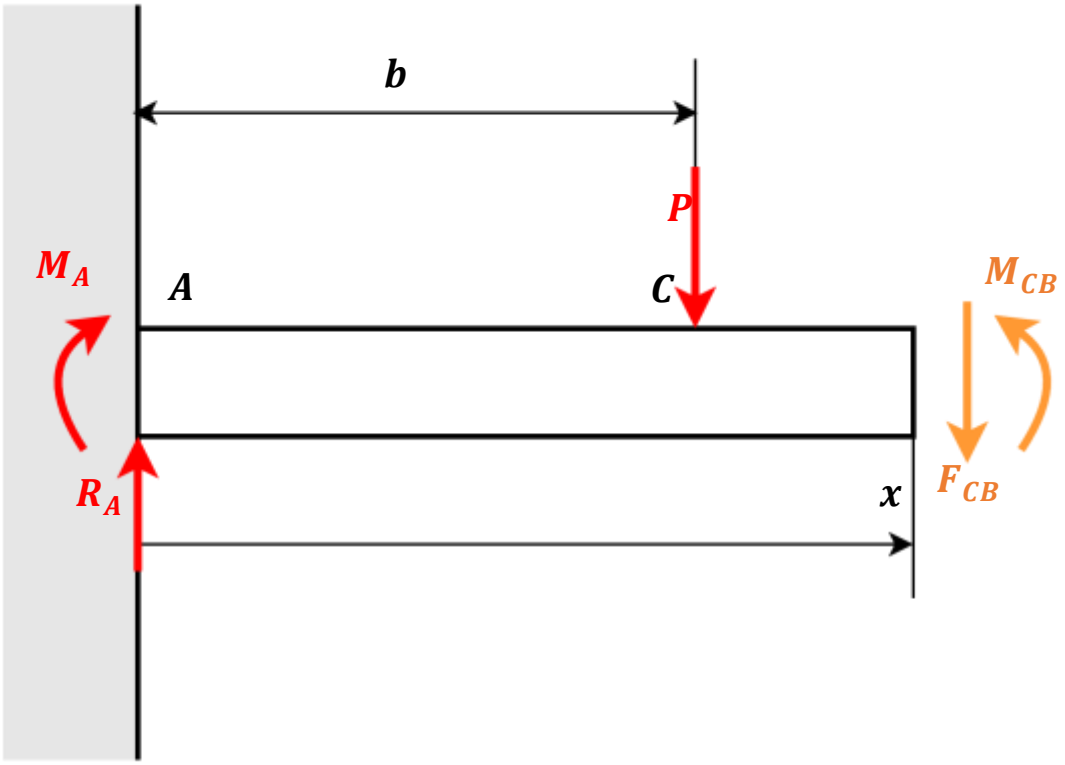
$$M_{AC} = M_A + x \cdot F_{AC}$$

（1）より、M_A を代入する。上で求めた F_{AC} も代入する。

$$M_{AC} = -Pb + Px$$

よって、

$$\therefore M_{AC} = P(x - b)$$



〈CB 間〉CB 間のある位置 x を考える。

自由体図において、鉛直方向の力のつり合いより、（1）の結果を代入して、

$$F_{CB} = R_A - P$$

$$\therefore F_{CB} = 0$$

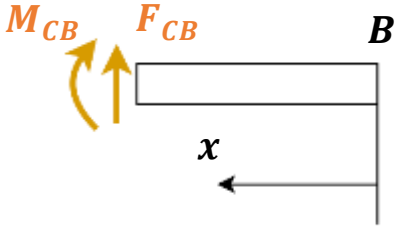
点 A における、力のモーメントのつり合いより、（1）の結果と、$F_{CB} = 0$ を考慮すると、

$$M_{CB} = M_A + Pb$$

$$\therefore M_{CB} = 0$$

点 B 基準で考えると、上の結果は明らか。

$$\therefore F_{CB} = 0 \quad \therefore M_{CB} = 0$$



（３）AB 間のたわみ角 θ およびたわみ v を、x を用いて表しなさい。

〈AC 間〉

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

（２）より、

$$-EI\frac{d^2v_{AC}}{dx^2} = M_{AC} = Px - Pb$$

両辺を積分して、

$$-EI\frac{dv_{AC}}{dx} = \int (Px - Pb)dx = \frac{P}{2}x^2 - Pbx + C_1 \qquad (1)$$

ふたたび、両辺を積分して、

$$-EIv_{AC} = \int \left(\frac{P}{2}x^2 - Pbx + C_1\right)dx = \frac{P}{6}x^3 - \frac{Pb}{2}x^2 + C_1x + C_2 \qquad (2)$$

積分定数 C_1, C_2 を決定するため、点 A（$x = 0$）における以下の条件を適用する。

$$x = 0 \text{ で} \qquad \frac{dv_{AC}}{dx} = 0\,, \quad \text{かつ} \quad v_{AC} = 0$$

上の条件と式(1),(2)より、

$$C_1 = 0\,, \quad C_2 = 0$$

よって、

$$\theta_{AC} = \frac{dv_{AC}}{dx} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{P}{2}x^2 - Pbx\right) \quad \therefore \theta_{AC} = -\frac{P}{2EI}x(x - 2b)$$

$$v_{AC} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{P}{6}x^3 - \frac{Pb}{2}x^2\right) \quad \therefore v_{AC} = -\frac{P}{6EI}x^2(x - 3b)$$

ここで、点 C $(x = b)$ におけるたわみ v_C, たわみ角 θ_C を求めておく。

$$\therefore \theta_C = \frac{P}{2EI}b^2 \quad \therefore v_C = \frac{P}{3EI}b^3$$

〈CB 間〉

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

（２）より、

$$-EI\frac{d^2v_{CB}}{dx^2} = M_{CB} = 0$$

両辺を積分して、

$$-EI\frac{dv_{CB}}{dx} = -EI\theta_{CB} = C_3 \tag{3}$$

ふたたび、両辺を積分して、

$$-EIv_{CB} = C_3x + C_4 \tag{4}$$

積分定数 C_3, C_4 を決定するため、点 C $(x = b)$ での結果を適用する。

$$\therefore \theta_C = \frac{P}{2EI}b^2 \quad \therefore v_C = \frac{P}{3EI}b^3$$

上の条件と式(3),(4)より、

$$C_3 = -EI\theta_C = -\frac{P}{2}b^2$$

$$C_4 = -EIv_C - C_3b = -\frac{P}{3}b^3 + \frac{P}{2}b^3 = \frac{P}{6}b^3$$

よって、

$$\therefore \theta_{CB} = \frac{P}{2EI}b^2$$

$$\therefore v_{CB} = \frac{Pb^2}{2EI}x - \frac{Pb^3}{6EI} = \frac{Pb^2}{6EI}(3x - b)$$

次に、図 1-2 に示すように、
図 1-1 と同じはり AB の AB 間に移動支持された点を設ける場合を考える。
移動支持の位置を $0 < a < L$ の範囲で移動させるとき、以下の問いに答えなさい。

（４）移動支持が AC 間にある場合、および CB 間にある場合それぞれについて、
移動支持された点 D における支持力 R_D をそれぞれ求めなさい。

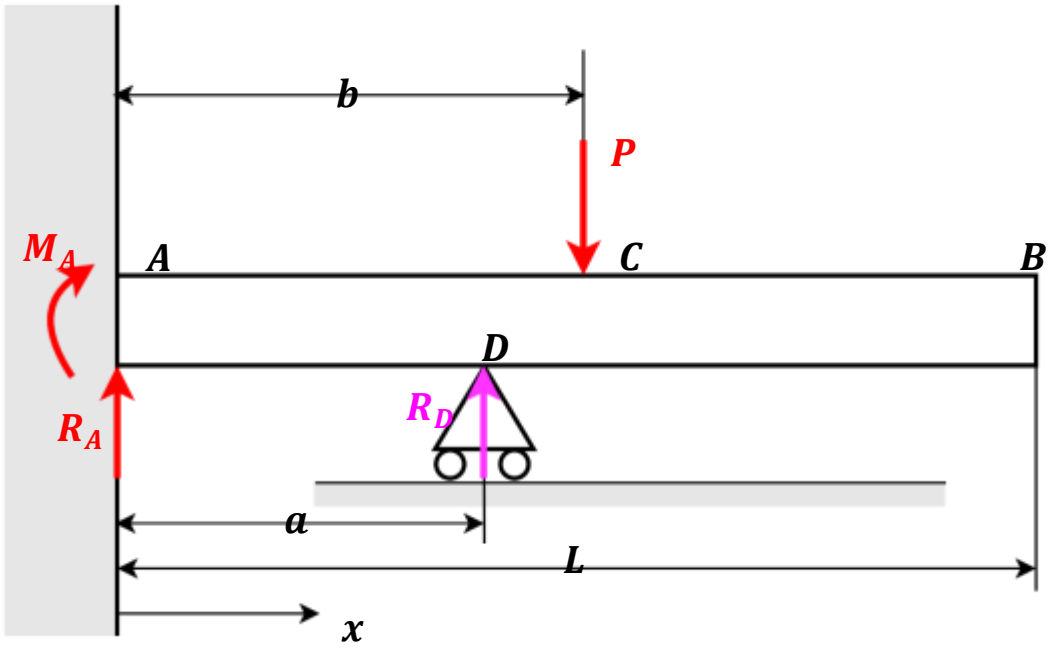


図 1-2〈移動支持が AC 間にある場合〉

自由体図において、力・モーメントのつり合いより、

$$R_D = P - R_A, \quad b \cdot P = a \cdot R_D + M_A$$

➡ **不静定問題となるため、点 D での適合条件（たわみ＝０）を考える。**

荷重 P のみが働く場合のたわみ v_{AC} と反力 R_D のみ働く場合のたわみの重ね合わせより、
（３）の結果を用いて、移動支持が AC 間にある場合のたわみ v は次式で表わせる。

$$v = -\frac{P}{6EI}x^2(x-3b) + \frac{R_D}{6EI}x^2(x-3a)$$

ここで、反力 R_D のみ働く場合のたわみは、$P = -R_D$, $b = a$ とおきかえている。

点 D $(x = a)$ において、たわみ $v = 0$ となる条件を適用する。

$$v = -\frac{P}{6EI}a^2(a-3b) - 2\frac{R_D}{6EI}a^3 = 0$$

$$\therefore R_D = \frac{3b-a}{2a}P$$

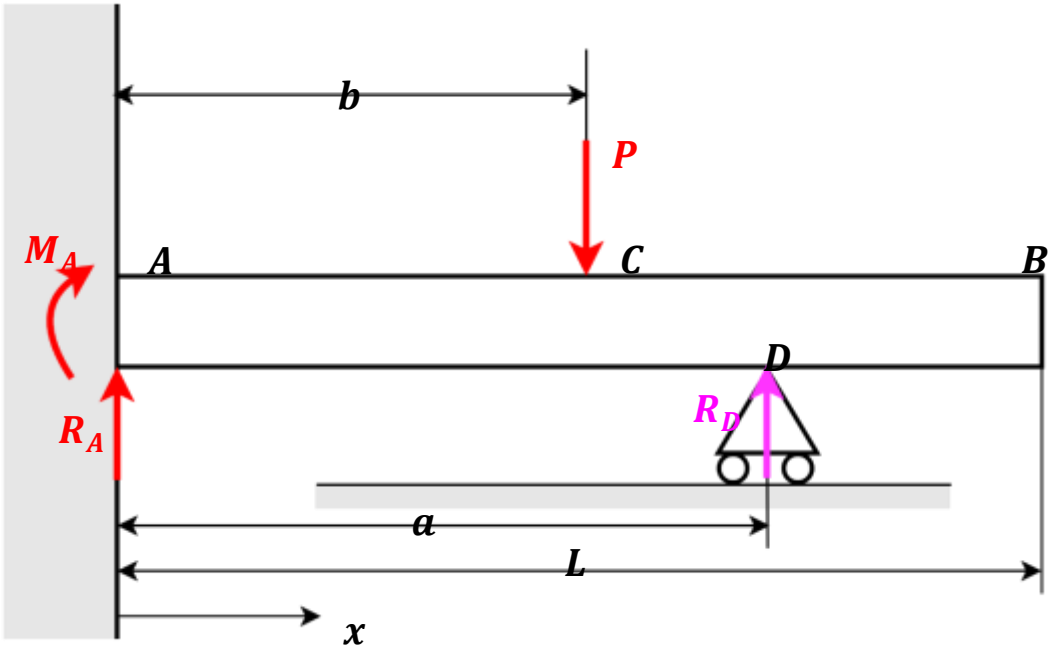


図 1-2〈移動支持が CB 間にある場合〉

➡ **同様に、不静定問題となるため、点 D での適合条件（たわみ＝0）を考える。**

荷重 P のみが働く場合のたわみ v_{CB} と反力 R_D のみ働く場合のたわみの重ね合わせより、（3）の結果を用いて、移動支持が CB 間にある場合のたわみ v は次式で表わせる。

$$v = \frac{Pb^2}{6EI}(3x - b) - \frac{R_D a^2}{6EI}(3x - a)$$

ここで、反力 R_D のみ働く場合のたわみは、$P = -R_D$, $b = a$ とおきかえている。

点 D $(x = a)$ において、たわみ $v = 0$ となる条件を適用する。

$$v = \frac{Pb^2}{6EI}(3a - b) - 2\frac{R_D}{6EI}a^3 = 0$$

$$\therefore R_D = \frac{b^2(3a - b)}{2a^3}P$$

（５）次の（i）（ii）の場合における点 B のたわみ v_B を、b を用いて表しなさい。

（i）$L = 2b, \quad a = \frac{1}{3}b$

（４）より、移動支持が CB 間にある場合のたわみ v は次式となる。

$$v = \frac{Pb^2}{6EI}(3x - b) - \frac{R_D a^2}{6EI}(3x - a)$$

ここで（４）の結果より、

$$R_D = \frac{3b - a}{2a}P$$

これと、$x = L = 2b, \quad a = b/3$ を代入すると、点 B のたわみ v_B は、

$$v_B = \frac{Pb^2}{6EI}(6b - b) - \frac{3b - b/3}{2 \cdot (b/3)}P \cdot \frac{(b/3)^2}{6EI}\left(6b - \frac{b}{3}\right) = \left(5 - \frac{68}{27}\right)\frac{Pb^3}{6EI}$$

$$\therefore v_B = \frac{67}{162}\frac{Pb^3}{EI}$$

（ii）$L = 3b, \quad a = 2b$

（４）より、移動支持が CB 間にある場合のたわみ v は次式となる。

$$v = \frac{Pb^2}{6EI}(3x - b) - \frac{R_D a^2}{6EI}(3x - a)$$

ここで（４）の結果より、

$$R_D = \frac{b^2(3a - b)}{2a^3}P$$

これと、$x = L = 3b, \quad a = 2b$ を代入すると、点 B のたわみ v_B は、

$$v_B = \frac{Pb^2}{6EI}(9b - b) - \frac{b^2(6b - b)}{16b^3} \cdot \frac{4Pb^2}{6EI}(9b - 2b) = \left(8 - \frac{5 \cdot 4 \cdot 7}{16}\right)\frac{Pb^3}{6EI}$$

$$\therefore v_B = -\frac{1}{8}\frac{Pb^3}{EI}$$

2021（R3）年度【１】略解

（１）	$R_A = P, \quad M_A = -Pb$	
（２）	〈AC 間〉	〈CB 間〉
	$F_{AC} = P$ $M_{AC} = P(x-b)$	$F_{CB} = 0$ $M_{CB} = 0$
（３）	$\theta_{AC} = -\dfrac{P}{2EI}x(x-2b)$ $v_{AC} = -\dfrac{P}{6EI}x^2(x-3b)$	$\theta_{CB} = \dfrac{P}{2EI}b^2$ $v_{CB} = \dfrac{Pb^2}{6EI}(3x-b)$
（４）	$R_D = \dfrac{3b-a}{2a}P$	$R_D = \dfrac{b^2(3a-b)}{2a^3}P$
（５）	(i)	(ii)
	$v_B = \dfrac{67}{162}\dfrac{Pb^3}{EI}$	$v_B = -\dfrac{1}{8}\dfrac{Pb^3}{EI}$

2021（R3）年度【１】講評

たわみに関する基本的な問い。基本的ゆえに計算ミスに気を付けたい。
重ね合わせや置き換えを用いることで、無駄な計算を省くことが大切。

令和３年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：材料力学　［2/2］

(問題 [1], [2] は別々の答案用紙に解答すること．)

[2] 図２に示すように，テーパ軸を内部にはめ込んだ長さ L の組合せ軸のねじりを考える．テーパ軸と外筒が一体となってねじりモーメント T を伝えるとき，以下の各問に答えなさい．ただし，テーパ軸の小端部，大端部の直径をそれぞれ d_1 および d_2，外筒の外径は d_3 で一定とし，テーパ軸および外筒の横弾性係数をそれぞれ G_1 および G_2 $(G_1 > G_2)$ とする．

(1) テーパ軸と外筒が受け持つトルクをそれぞれ T_1 および T_2 とするとき，ねじりモーメント T との関係を表しなさい．

(2) テーパ軸の任意断面の直径を d とするとき，テーパ軸と外筒それぞれの任意の横断面における断面二次極モーメント I_{p1} および I_{p2} を，d を用いて表しなさい．

(3) 任意断面におけるテーパ軸および外筒の比ねじれ角 ϕ_1 および ϕ_2 の間の関係を示しなさい．

(4) 問(1)～(3)の結果を用いて，任意断面における T_1 および T_2，さらにテーパ軸と外筒それぞれの外周におけるせん断応力 τ_1 および τ_2 を求めなさい．

(5) 外筒のせん断応力 τ_2 の最大値が生じる位置および最大値を求めなさい．

(6) テーパ軸のせん断応力 τ_1 の最大値が生じる断面位置での直径 d を求めなさい．

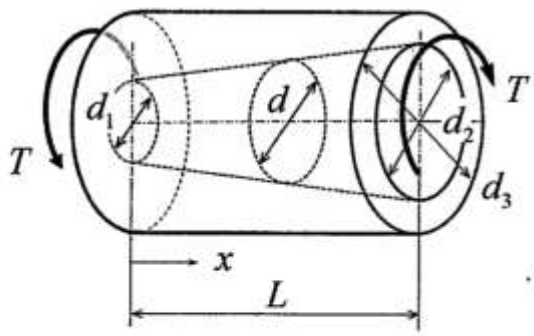


図２

2021（R3）年度【２】問題〈テーパ棒〉

（１）テーパ軸と外筒が受け持つトルクをそれぞれ T_1 および T_2 とするとき、ねじりモーメント T との関係を表しなさい。

テーパ軸のトルクと外筒のトルクの和が、ねじりモーメント T となる。

$$T = T_1 + T_2$$

（２）テーパ軸の任意断面の直径を d とするとき、テーパ軸と外筒それぞれの任意の横断面における断面二次極モーメント I_{p1} および I_{p2} を、d を用いて表しなさい。

丸棒の断面二次極モーメント I_p は、直径を d として次式で表せる。

〈丸棒〉 $I_p = \dfrac{\pi d^4}{32}$

外直径が d, 内直径が nd $(0 < n < 1)$ の中空円筒においては次式となる。

〈中空円筒〉 $I_p = \dfrac{\pi d^4(1-n^4)}{32}$

・テーパ軸の断面二次極モーメント I_{p1}

$$I_{p1} = \frac{\pi d^4}{32}$$

・外筒（中空円筒）の断面二次極モーメント I_{p2}

$$I_{p2} = \frac{\pi\left({d_3}^4 - d^4\right)}{32}$$

（３）任意断面におけるテーパ軸および外筒の比ねじれ角 ϕ_1 および ϕ_2 の間の関係を示しなさい。

適合条件より、テーパ軸および外筒の比ねじれ角 ϕ_1 および ϕ_2 の間の関係は、

$$\phi_1 = \phi_2$$

（4）問（1）～（3）の結果を用いて、任意断面における T_1 および T_2 ,さらに
テーパ軸と外筒それぞれの外周におけるせん断応力 τ_1 および τ_2 を求めなさい。

比ねじれ角は、次式で表せる。

〈比ねじれ角〉 $\phi = \dfrac{T}{GI_p}$

よって、比ねじれ角 ϕ_1 および ϕ_2 は、

$$\phi_1 = \frac{T_1}{G_1 I_{p1}}, \quad \phi_2 = \frac{T_2}{G_2 I_{p2}}$$

（3）で示した適合条件より、

$$\frac{T_1}{G_1 I_{p1}} = \frac{T_2}{G_2 I_{p2}} \quad \therefore T_2 = \frac{G_2 I_{p2}}{G_1 I_{p1}} T_1$$

（1）で示した式に、これを代入して整理する。

$$T = \left(1 + \frac{G_2 I_{p2}}{G_1 I_{p1}}\right) T_1 \quad \therefore T_1 = \frac{1}{1 + \dfrac{G_2 I_{p2}}{G_1 I_{p1}}} T, \quad \therefore T_2 = \frac{1}{1 + \dfrac{G_1 I_{p1}}{G_2 I_{p2}}} T_1$$

（2）の結果を代入する。

$$\therefore T_1 = \frac{1}{1 + \dfrac{G_2}{G_1} \dfrac{{d_3}^4 - d^4}{d^4}} T \quad \therefore T_2 = \frac{1}{1 + \dfrac{G_1}{G_2} \dfrac{d^4}{{d_3}^4 - d^4}} T$$

せん断応力 τ とトルク T の関係は次式となる。ここで、中心軸からの距離を r とする。

$$\tau = \frac{Tr}{I_p}$$

・テーパ軸の外周におけるせん断応力 τ_1

$$\tau_1 = \frac{T_1}{I_{p1}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{16}{\pi d^3} \frac{1}{1 + \dfrac{G_2}{G_1} \dfrac{{d_3}^4 - d^4}{d^4}} T$$

・外筒の外周におけるせん断応力 τ_2

$$\tau_2 = \frac{T_2}{I_{p2}} \cdot \frac{d_3}{2} = \frac{16 d_3}{\pi\left({d_3}^4 - d^4\right)} \frac{1}{1 + \dfrac{G_1}{G_2} \dfrac{d^4}{{d_3}^4 - d^4}} T$$

〈参考〉

丸棒の断面二次極モーメント I_p と極断面係数 Z_p は、直径を d として次式で表せる。

$$〈丸軸〉\ I_p = \frac{\pi d^4}{32},\quad Z_p = \frac{I}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16}$$

ねじりによる最大せん断応力 $\tau_{max}(x)$ は、丸軸の表面の位置で、次式となる。

$$\tau_{max}(x) = \frac{|T(x)|}{Z_p} = \frac{16|T(x)|}{\pi d^3}$$

（５）外筒のせん断応力 τ_2 の最大値が生じる位置および最大値を求めなさい。

（４）より、外筒のせん断応力 τ_2 は、

$$\tau_2 = \frac{16d_3}{\pi}\frac{1}{\left({d_3}^4 - d^4\right) + \frac{G_1}{G_2}d^4}T = \frac{16d_3}{\pi}\frac{G_2}{G_2{d_3}^4 + (G_1 - G_2)d^4}T$$

問題文より、$G_1 - G_2 > 0$ ゆえ、τ_2 が最大値を取るとき、d は最小値を取る。よって、

$d = d_1$ で外筒のせん断応力 τ_2 は最大値 τ_{2_Max} が生じる。

$$\therefore \tau_{2_Max} = \frac{16d_3}{\pi}\frac{G_2}{G_2{d_3}^4 + (G_1 - G_2){d_1}^4}T$$

（６）テーパ軸のせん断応力 τ_1 の最大値が生じる断面位置での直径 d を求めなさい。

（４）より、テーパ軸のせん断応力 τ_1 は、

$$\tau_1 = \frac{16}{\pi d^3}\frac{1}{1 + \frac{G_2}{G_1}\frac{{d_3}^4 - d^4}{d^4}}T = \frac{16}{\pi}\frac{G_1}{G_2\frac{{d_3}^4}{d} + (G_1 - G_2)d^3}T$$

$f(d) = G_2\frac{{d_3}^4}{d} + (G_1 - G_2)d^3$ とすると、τ_1 が最大値を取るとき、$f(d)$ は最小値を取る。

$$f'(d) = -G_2\frac{{d_3}^4}{d^2} + 3(G_1 - G_2)d^2 = \frac{3(G_1 - G_2)d^4 - G_2{d_3}^4}{d^2}$$

$f'(d) = 0$ を解くと、これを満たす直径 d_x は、

$$\therefore d_x = {d_3}\sqrt[4]{\frac{G_2}{3(G_1 - G_2)}}$$

場合分けを行う。

① $d_1 \leq d_x \leq d_2$ のとき、$f(d)$ は $d = d_x$ で最小値を取る。

② $d_x \leq d_1$ のとき、$f(d)$ は単調増加ゆえ、$d = d_1$ で最小値を取る。

③ $d_2 \leq d_x$ のとき、$f(d)$ は単調減少ゆえ、$d = d_2$ で最小値を取る。

2021（R3）年度【２】略解

（１）	$T = T_1 + T_2$
（２）	$I_{p1} = \dfrac{\pi d^4}{32}, \quad I_{p2} = \dfrac{\pi\left({d_3}^4 - d^4\right)}{32}$
（３）	$\phi_1 = \phi_2$
（４）	$T_1 = \dfrac{1}{1 + \dfrac{G_2}{G_1}\dfrac{{d_3}^4 - d^4}{d^4}}T, \quad T_2 = \dfrac{1}{1 + \dfrac{G_1}{G_2}\dfrac{d^4}{{d_3}^4 - d^4}}T$ $\tau_1 = \dfrac{16}{\pi d^3}\dfrac{1}{1 + \dfrac{G_2}{G_1}\dfrac{{d_3}^4 - d^4}{d^4}}T, \quad \tau_2 = \dfrac{16d_3}{\pi\left({d_3}^4 - d^4\right)}\dfrac{1}{1 + \dfrac{G_1}{G_2}\dfrac{d^4}{{d_3}^4 - d^4}}T$
（５）	$d = d_1, \quad \tau_{2_Max} = \dfrac{16d_3}{\pi}\dfrac{G_2}{G_2{d_3}^4 + (G_1 - G_2){d_1}^4}T$
（６）	略

2021（R3）年度【２】講評

ねじりの問題であった。手が疲れそう。