2022 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：材料力学　［ 1 / 3］

（問題［1］，［2］は別々の答案用紙に解答すること．）

［1］図 1-1 に示すように，長さ $2L$ の剛体棒 AC が，鉛直壁面の点 A で回転支持されている．この剛体棒を水平に保持するために，点 B の上方，距離 L にある点 D と，剛体棒の点 B を断面積 A_1 の鋼線でゆるみのないように結ぶ．さらに，剛体棒の端点 C をバネ定数 k のコイルバネで支持する．この状態で，剛体棒の端点 C に鉛直下向きの集中外力 P を作用させた．以下の問いに答えなさい．ただし，鋼線の伸び，コイルバネの縮みおよび剛体棒の回転角は微小であるとする．また，鋼線の縦弾性係数を E として，剛体棒，鋼線およびコイルバネの質量は無視すること．

(1) 鋼線 BD の張力を N_1，点 F におけるコイルバネの支持力を R_F として，剛体棒に作用する点 A まわりのモーメントのつり合い式を書きなさい．

(2) 鋼線 BD の伸び δ_1 を，N_1 を用いて表しなさい．

(3) 剛体棒の点 C での鉛直下向き変位 δ_C を，R_F を用いて表しなさい．

(4) 剛体棒の点 B および点 C の鉛直下向き変位 δ_B，δ_C の間に成り立つ関係式を求めなさい．

(5) 鋼線 BD に作用する応力 σ_1 を求めなさい．

次に図 1-2 に示すように，点 C におけるコイルバネの支持を取り外し，代わりに剛体棒の点 C を断面積 A_2 の鋼線で，点 D とゆるみが無いように結ぶ．この状態で，剛体棒の端点 C に鉛直下向きの集中外力 P を作用させた．以下の問いに答えなさい．ただし，鋼線の伸びおよび剛体棒の回転角は微小であるとする．また，鋼線の縦弾性係数を E として，剛体棒や鋼線の質量は無視すること．

(6) 鋼線 BD の張力を N_1，鋼線 CD の張力を N_2 として，剛体棒に作用する点 A まわりのモーメントのつり合い式を書きなさい．

(7) 鋼線 CD の伸び δ_2 を，N_2 を用いて表しなさい．

(8) 剛体棒の点 C の鉛直下向き変位 δ_C を，δ_2 を用いて表しなさい．

(9) 鋼線 BD の伸び δ_1 と δ_2 の間に成り立つ関係式を求めなさい．

(10) 鋼線 BD および CD に作用する応力 σ_1 および σ_2 を求めなさい．

(11) 剛体棒の点 C の鉛直下向き変位 δ_C を求めなさい．

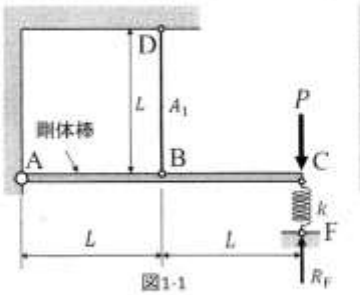


図1-1

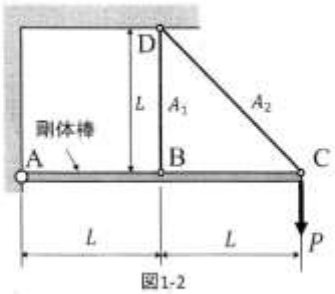


図1-2

2022（R4）年度【１】問題〈はりと針金〉

（１）鋼線 BD の張力 N_1 , 点 F におけるコイルバネの支持力を R_F として、
剛体棒に作用する点 A まわりのモーメントのつり合い式を書きなさい。

点 A まわりの力のモーメントのつり合い式は、

$$L \cdot N_1 + 2L \cdot R_F = 2L \cdot P$$

（２）鋼線 BD の伸び δ_1 を、N_1 を用いて表しなさい。

長さ L の一様な棒の全体の伸び δ は次式で表せる。

$$\delta = \int d\delta = \int \varepsilon dx = \int \frac{\sigma}{E} dx = \int_0^L \frac{Q}{EA} dx = \frac{QL}{EA}$$

ここで、ε はひずみ、σ は応力、E はヤング率、Q は内力、A は面積である。

鋼線 BD の伸び δ_1 は、

$$\delta_1 = \frac{N_1 L}{EA_1}$$

（３）剛体棒の点 C での鉛直下向き変位 δ_C を、R_F を用いて表しなさい。

フックの法則より、

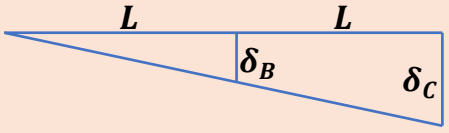
$$R_F = k\delta_C$$

$$\therefore \delta_C = \frac{R_F}{k}$$

（４）剛体棒の点 B および点 C の鉛直下向き変位 δ_B, δ_C の間に成り立つ関係式を
求めなさい。

三角形の相似の関係から、

$$\delta_B : \delta_c = 1 : 2$$



よって、

$$\delta_c = 2\delta_B$$

（5）鋼線 BD に作用する応力 σ_1 を求めなさい。

長さ L の一様な棒の全体の伸び δ は次式で表せる。

$$\delta = \frac{\sigma}{E} L$$

$$\delta_B = \frac{\sigma_1}{E} L \quad \therefore \sigma_1 = \frac{E}{L} \delta_B$$

ここで（3）（4）の結果より、

$$\delta_B = \frac{1}{2} \delta_c = \frac{1}{2} \frac{R_F}{k}$$

（1）のモーメントのつり合い式より、$R_F = P - N_1/2$ を代入する。

$$\sigma_1 = \frac{E}{2kL} \left(P - \frac{N_1}{2} \right)$$

これが、$\sigma_1 = N_1/A_1$ と等しくなることから、N_1 を求める。

$$\frac{E}{2kL} \left(P - \frac{N_1}{2} \right) = \frac{N_1}{A_1} \quad \therefore \left(\frac{2kL}{EA_1} + \frac{1}{2} \right) N_1 = P$$

$$\therefore N_1 = \frac{2EA_1}{4kL + EA_1} P$$

よって、鋼線 BD に作用する応力 σ_1 は、

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{2E}{4kL + EA_1} P$$

（6）鋼線 BD の張力 N_1 , 鋼線 CD の張力 N_2 として、
剛体棒に作用する点 A まわりのモーメントのつり合い式を書きなさい。

点 A まわりの力のモーメントのつり合い式は、

$$L \cdot N_1 + 2L \cdot \frac{N_2}{\sqrt{2}} = 2L \cdot P$$

（7）鋼線 CD の伸び δ_2 を、N_2 を用いて表しなさい。

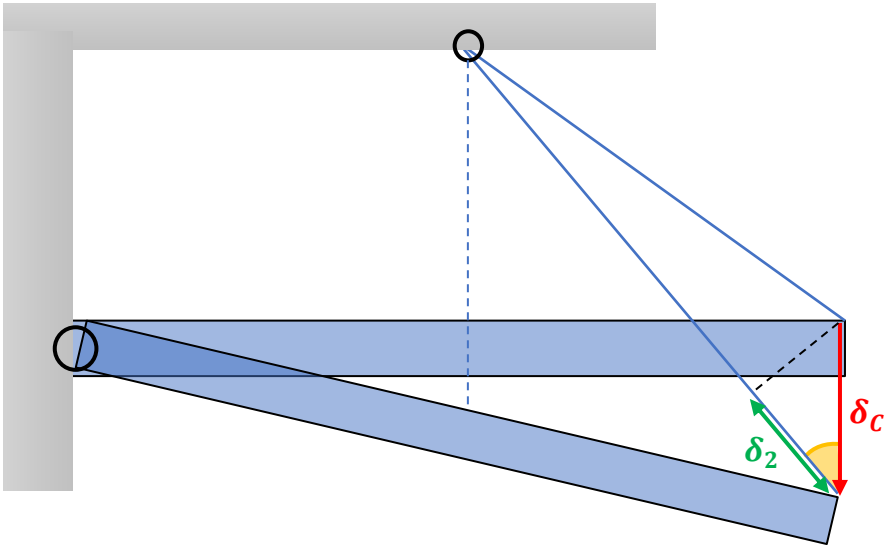
長さ L の一様な棒の全体の伸び δ は次式で表せる。

$$\delta = \frac{QL}{EA}$$

鋼線 CD の伸び δ_2 は、

$$\delta_2 = \frac{N_2(\sqrt{2}L)}{EA_2} = \frac{\sqrt{2}N_2L}{EA_2}$$

（8）剛体棒の点 C の鉛直下向き変位 δ_C を、δ_2 を用いて表しなさい。



三角比の関係から、

$$\delta_2 : \delta_c = 1 : \sqrt{2}$$

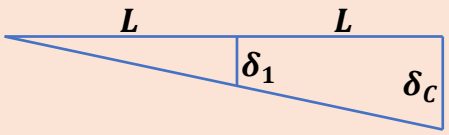
よって、

$$\delta_c = \sqrt{2}\delta_2$$

（9）鋼線 BD の伸び δ_1 と δ_2 の間に成り立つ関係式を求めなさい。

三角形の相似の関係から、

$$\delta_1 : \delta_c = 1 : 2$$



よって、

$$\delta_c = 2\delta_1$$

（8）の結果を代入して、

$$\therefore \delta_2 = \sqrt{2}\delta_1$$

（10）鋼線 BD および CD に作用する応力 σ_1 および σ_2 を求めなさい。

長さ L の一様な棒の全体の伸び δ は次式で表せる。

$$\delta = \frac{\sigma}{E}L$$

鋼線 BD について、

$$\delta_1 = \frac{\sigma_1}{E}L \quad \therefore \sigma_1 = \frac{E}{L}\delta_1$$

ここで（7）（9）の結果より、

$$\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_2 = \frac{N_2 L}{EA_2}$$

よって、

$$\sigma_1 = \frac{E}{L}\frac{N_2 L}{EA_2} = \frac{N_2}{A_2} = \sigma_2$$

$\sigma_1 = N_1/A_1$ と $\sigma_2 = N_2/A_2$ は等しくなることから、

（6）のモーメントのつり合い式より、N_2 を消去して、N_1 を求める。

$$N_1 + \sqrt{2}\cdot\frac{A_2}{A_1}N_1 = 2P \quad \therefore N_1 = \frac{2A_1}{A_1 + \sqrt{2}A_2}P$$

$$\therefore \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{2}{A_1 + \sqrt{2}A_2}P$$

（１１）剛体棒の点 C での鉛直下向き変位 δ_C を求めなさい。

（7）（8）の結果より、

$$\delta_c = \sqrt{2}\delta_2 = \frac{2N_2L}{EA_2}$$

（１０）より、N_2 を代入して、

$$\delta_c = \frac{2\left(\frac{A_2}{A_1}N_1\right)L}{EA_2} = \frac{2N_1L}{EA_1}$$

（１０）で求めた N_1 を代入して、

$$\therefore \delta_c = \frac{2\left(\frac{2A_1}{A_1+\sqrt{2}A_2}P\right)L}{EA_1} = \frac{4PL}{E\left(A_1+\sqrt{2}A_2\right)}$$

2022（R4）年度【１】略解

（１）	$L \cdot N_1 + 2L \cdot R_F = 2L \cdot P$
（２）	$\delta_1 = \dfrac{N_1 L}{E A_1}$
（３）	$\delta_C = \dfrac{R_F}{k}$
（４）	$\delta_c = 2\delta_B$
（５）	$\sigma_1 = \dfrac{2E}{4kL + EA_1} P$
（６）	$L \cdot N_1 + 2L \cdot \dfrac{N_2}{\sqrt{2}} = 2L \cdot P$
（７）	$\delta_2 = \dfrac{\sqrt{2} N_2 L}{E A_2}$
（８）	$\delta_c = \sqrt{2}\delta_2$
（９）	$\delta_2 = \sqrt{2}\delta_1$
（１０）	$\sigma_1 = \sigma_2 = \dfrac{2}{A_1 + \sqrt{2} A_2} P$
（１１）	$\delta_c = \dfrac{4PL}{E\left(A_1 + \sqrt{2} A_2\right)}$

2022（R4）年度【１】講評

たわみに関する基本的な問い。変形の適合性に関して幾何的に考察するタイプの問題。

2022 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：材料力学　[2 / 3]

(問題 [1], [2] は別々の答案用紙に解答すること．)

[2] はりに作用する分布荷重 w, および同荷重によってはりの断面に作用するせん断力 F および曲げモーメント M の間には次の関係式が成り立つ．

$$\frac{dM}{dx}=F,\quad \frac{d^2M}{dx^2}=\frac{dF}{dx}=-w$$

ここで，F および M は図 2-1 に示す向きをそれぞれ正方向とする．これらの関係式を利用しつつ，以下の各問いに答えなさい．ただし，式展開を示す場合には，必ず言葉での説明を加えること．なお，はりの曲げ剛性は EI であるとする．

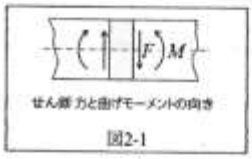


図2-1



図2-2

問 **2-1**　ある両端突き出しはり(図 2-2 参照)のせん断力図(SFD)が図 2-3 に示すように与えられている．なお，CD 間は直線である．また，(2)および(3)を解答する際には，解答欄の図を使用しなさい．

(1) SFD から判断して，支持点の位置はどこになるか，その根拠を示すとともに各支持反力を求めなさい．
(2) はりに作用する荷重を図示するとともに，各区間および各点ごとに，そう判断した理由をそれぞれ説明しなさい．
(3) このはりに対する曲げモーメント図(BMD)を描くとともに，各区間および各点ごとにその根拠を説明しなさい．ただし，描画に際して，主要位置における諸量は明記すること．

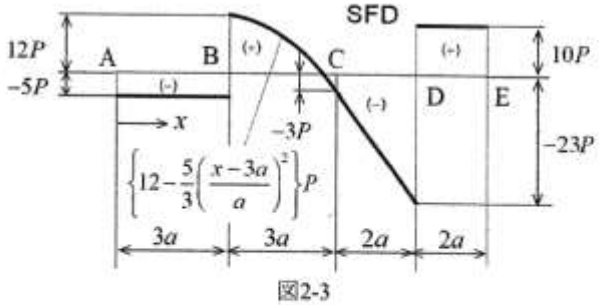


図2-3

(次頁に続く)

2022（R4）年度【２】問題〈SFD と BMD〉

（１）SFD から判断して、支持点の位置はどこになるか、
その根拠を示すとともに各支持反力を求めなさい。

せん断力図 SFD は集中荷重の点で２つ値を持ちうる上、
その集中荷重分だけジャンプした図になる。よって、

点 B $(x = 3a)$ において、上向きの支持反力 $R_B = 12P - (-5P) = 17P$

点 C $(x = 8a)$ において、上向きの支持反力 $R_D = 10P - (-23P) = 33P$

（２）はりに作用する荷重を図示するとともに、各区間および各点ごとに、
そう判断した理由をそれぞれ説明しなさい。

まず、AB 間・DE 間には一定のせん断力が作用していることから、

点 A $(x = 0)$ において、下向きの集中荷重 $5P$ が作用している。

点 E $(x = 10a)$ において、下向きの集中荷重 $10P$ が作用している。

次に、分布荷重 w とせん断力 F の関係は、問題文より次式となる。

$$\frac{dF}{dx} = -w$$

よって、SFD において、

直線（１次関数）の部分は、等分布荷重が作用している。

２次関数の部分は、直線（１次関数）的に変化する分布荷重が作用している。

以下、具体的に式を求めていく。

SFD に示されたせん断力 F_{BC} から、BC 間に作用する分布荷重 w_{BC} を求めると、

$$w_{BC} = -\frac{dF_{BC}}{dx}$$

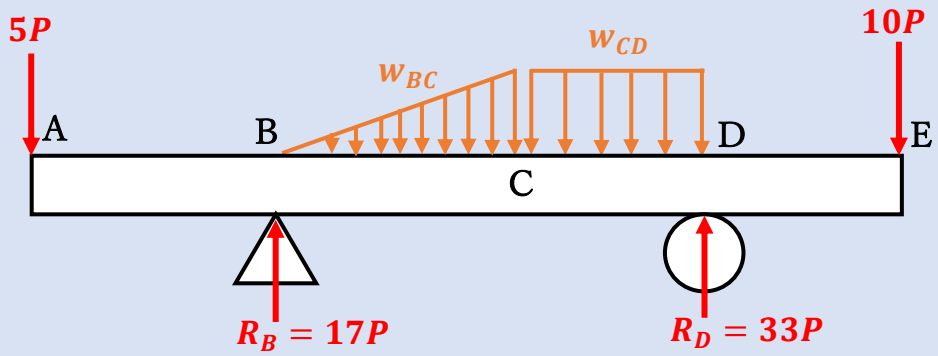
$$= -\frac{d}{dx}\left\{12 - \frac{5}{3}\left(\frac{x-3a}{a}\right)^2\right\}P = \frac{10}{3a}\left(\frac{x-3a}{a}\right)P$$

SFD に示されたせん断力 F_{CD} から、CD 間に作用する分布荷重 w_{CD} を求めると、

$$w_{CD} = -\frac{dF_{CD}}{dx}$$

$$= -\frac{d}{dx}\left\{-\frac{20P}{2a}(x-6a) - 3P\right\} = \frac{10}{a}P$$

以上より、図示すると、



両端突き出しはりに作用する荷重

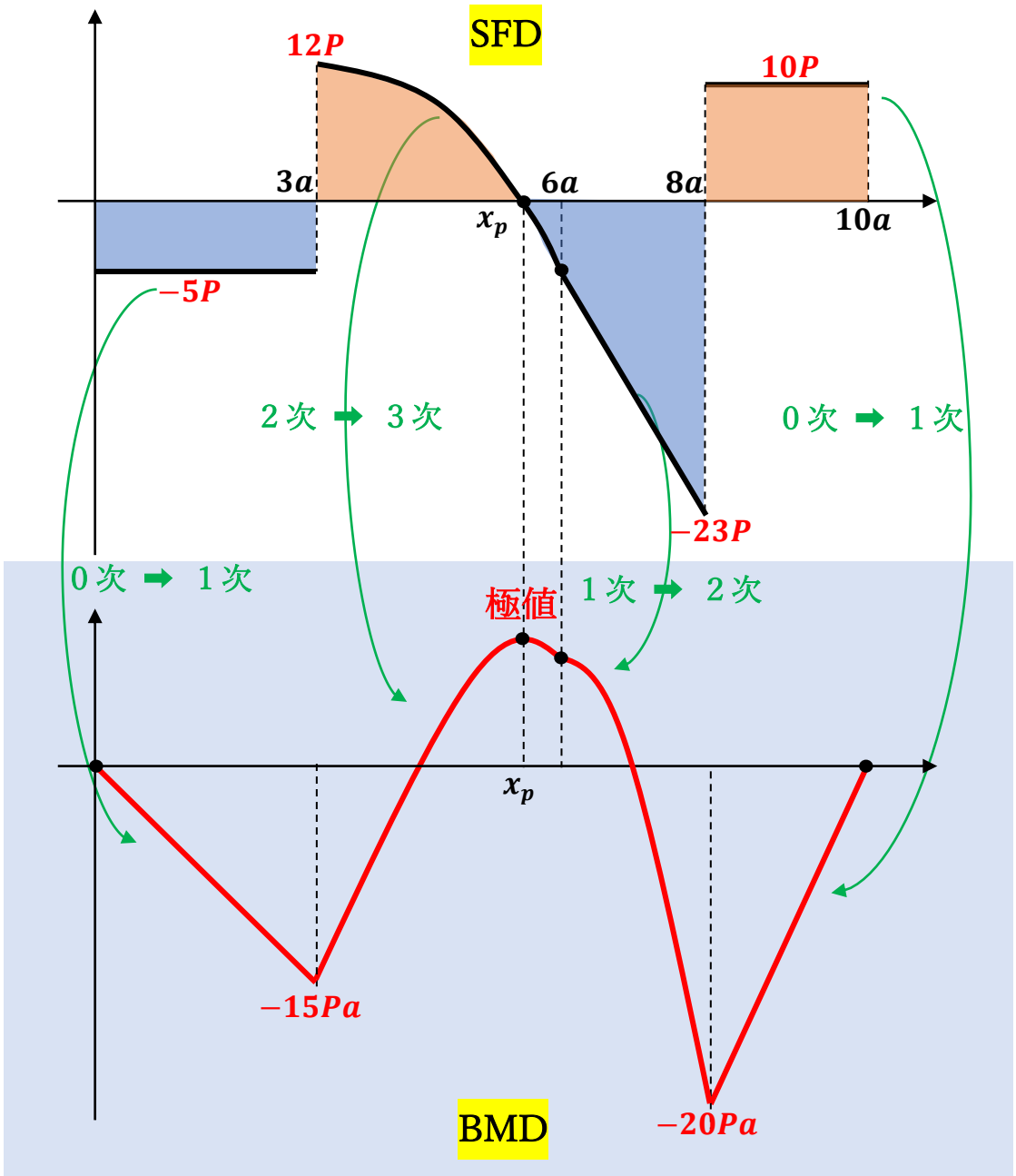
（3）このはりに対する曲げモーメント図（BMD）を描くとともに、
各区間および各点ごとにその根拠を説明しなさい。
ただし、描画に際して、主要位置における諸量は明記すること。

曲げモーメント M とせん断力 F の関係は、問題文より次式となる。

$$\frac{dM}{dx} = F, \quad \rightarrow M = \int F\ dx$$

よって、曲げモーメント $M(x)$ は、せん断力 $F(x)$ の次数より 1 つ上の関数となる。
また、SFD での符号付き面積分だけ BMD では増加する。
そして、SFD で 0 の値となっているところは、BMD では極値となる。

SFD との対応を考えて、BMD を図示する。



極値を取る値 x_p は、$F_{BC} = 0$ を解いて、

$$x_p = \frac{15 + 6\sqrt{5}}{5} a \quad (\because x_p > 3a)$$

また、自由端 $(x = a,\ 10a)$ では曲げモーメントは 0 である。

〈曲げモーメントの計算〉境界条件を用いて、積分定数を求める。

$$M_{AB} = \int F_{AB}\ dx = \int (-5P)\, dx = -5Px + C_1$$

$$\therefore M_{AB} = -5Px \quad (\because C_1 = 0)$$

$$M_{DE} = \int F_{DE}\ dx = \int (10P)\ dx = 10Px + C_4$$

$$\therefore M_{DE} = 10Px - 100Pa \quad (\because C_4 = -100Pa)$$

$$M_{BC} = \int F_{BC}\ dx = \int \left\{12 - \frac{5}{3}\left(\frac{x-3a}{a}\right)^2\right\} P\ dx = 12Px - \frac{5Pa}{9}\left(\frac{x-3a}{a}\right)^3 + C_2$$

$$\therefore M_{BC} = 12Px - \frac{5Pa}{9}\left(\frac{x-3a}{a}\right)^3 - 51Pa \quad (\because C_2 = -51Pa)$$

$$M_{CD} = \int F_{CD}\ dx = \int \left(-\frac{10P}{a}x + 57P\right) dx = -\frac{5P}{a}x^2 + 57Px + C_3$$

$$\therefore M_{CD} = -\frac{5P}{a}x^2 + 57Px - 156Pa \quad (\because C_3 = -156Pa)$$

・点 C での値

$$M(6a) = M_{BC}(6a) = M_{CD}(6a) = 6Pa$$

・極大値

$$M(x_p) = M_{BC}(x_p) = M_{CD}(x_p) = \left(59Pa - \frac{72\sqrt{5}}{5}\right)Pa$$

問 2-2　次に，ある片持ちはりの曲げモーメント図(BMD)が図 2-4 に示すように与えられている場合を考える．(5)および(6)を解答する際には，解答欄の図を使用しなさい．

(4) BMD から判断して，固定端および自由端の位置はどこになるか，その根拠を示すとともに固定端における支持モーメントを求めなさい．
(5) このはりに対するせん断力図(SFD)を描くとともに，各区間および各点ごとにその根拠を説明しなさい．ただし，描画に際して，主要位置における諸量を明記すること．
(6) このはりに作用する荷重を図示するとともに，各区間および各点ごとにその根拠を説明しなさい．
(7) 自由端でのたわみを求めなさい．

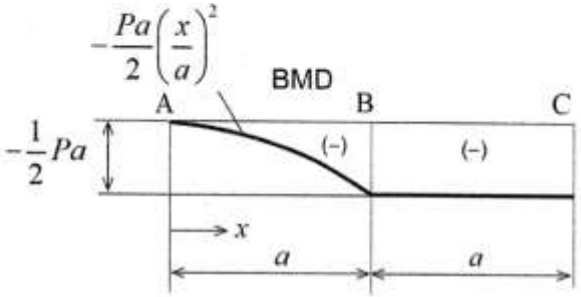


図2-4

（４）BMD から判断して、固定端および自由端の位置はどこになるか、
その根拠を示すとともに固定端における支持モーメントを求めなさい。

自由端では、曲げモーメントは 0（極値）となるので、点 A $(x = 0)$ が自由端。
固定端は、点 C $(x = 2a)$ で、支持モーメントは、

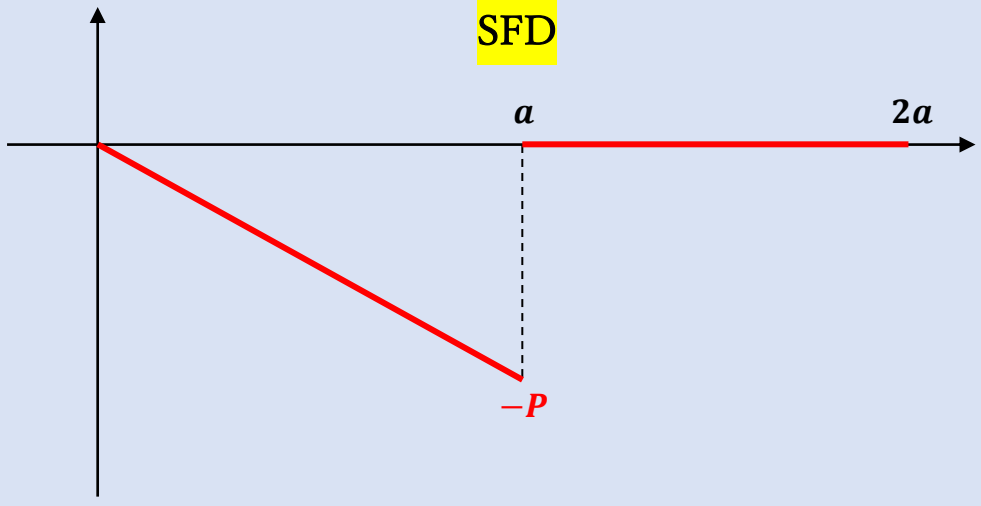
$$M_C = -\frac{1}{2}Pa$$

（５）このはりに対するせん断力図（SFD）を描くとともに、
各区間および各点ごとにこの根拠を説明しなさい。
ただし、描画に際して、主要位置における諸量を明記すること。

曲げモーメント M とせん断力 F の関係は、問題文より次式となる。

$$\frac{dM}{dx} = F, \quad \rightarrow M = \int F\ dx$$

よって、曲げモーメント $M(x)$ は、せん断力 $F(x)$ の次数より 1 つ上の関数となる。
また、SFD での符号付き面積分だけ BMD では増加する。
そして、SFD で 0 の値となっているところは、BMD では極値となる。
BMD との対応を考えて、SFD を図示する。



（6）このはりに作用する荷重を図示するとともに、
各区間および各点ごとにその根拠を説明しなさい。

せん断力図 SFD は集中荷重の点で 2 つ値を持ちうる上、
その集中荷重分だけジャンプした図になる。よって、
点 B $(x = a)$ において、上向きの集中荷重 $P/4$ が作用している。

分布荷重 w とせん断力 F の関係は、問題文より次式となる。

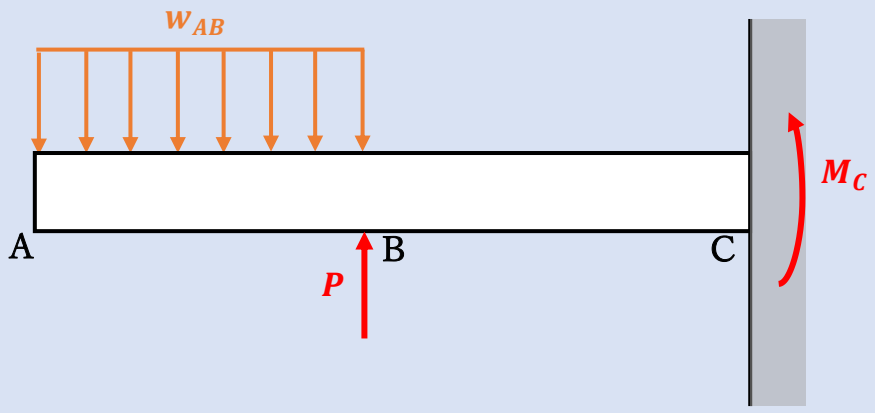
$$\frac{dF}{dx} = -w$$

よって、SFD において、
直線（1 次関数）の部分は、等分布荷重が作用している。
SFD に示されたせん断力 F_{AB} から、AB 間に作用する分布荷重 w_{AB} を求めると、

$$w_{AB} = -\frac{dF_{AB}}{dx}$$

$$= -\frac{d}{dx}\left(-\frac{P}{a}x\right) = \frac{P}{a}$$

以上より、図示すると、



片持ちはりに作用する荷重

（7）自由端でのたわみを求めなさい。

〈BC 間〉

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

BMD より、

$$-EI\frac{d^2v_{BC}}{dx^2} = M_{BC} = -\frac{Pa}{2}$$

両辺を積分して、

$$-EI\frac{dv_{BC}}{dx} = -\frac{Pa}{2}\int dx = -\frac{Pa}{2}x + C_3 \tag{3}$$

ふたたび、両辺を積分して、

$$-EIv_{BC} = \int\left(-\frac{Pa}{2}x + C_3\right)dx = -\frac{Pa}{4}x^2 + C_3x + C_4 \tag{4}$$

積分定数 C_3, C_4 を決定するため、点 C（$x = 2a$）における以下の条件を適用する。

$$x = 2a \text{ で} \qquad \frac{dv_{BC}}{dx} = 0\,, \quad \text{かつ} \quad v_{BC} = 0$$

上の条件と式(3),(4)より、

$$C_3 = Pa^2\,, \quad C_4 = -Pa^3$$

よって、

$$\theta_{BC} = \frac{dv_{BC}}{dx} = -\frac{1}{EI}\left(-\frac{Pa}{2}x + Pa^2\right) \quad \therefore \theta_{BC} = \frac{Pa}{2EI}(x - 2a)$$

$$v_{BC} = -\frac{1}{EI}\left(-\frac{Pa}{4}x^2 + Pa^2x - Pa^3\right) \quad \therefore v_{BC} = \frac{Pa}{4EI}(x - 2a)^2$$

ここで、点 B $(x = a)$ におけるたわみ v_B, たわみ角 θ_B を求めておく。

$$\therefore \theta_B = -\frac{Pa^2}{2EI} \quad \therefore v_B = \frac{Pa^3}{4EI}$$

〈AB 間〉

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

BMD より、

$$-EI\frac{d^2v_{AB}}{dx^2} = M_{AB} = -\frac{Pa}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2$$

両辺を積分して、

$$-EI\frac{dv_{AB}}{dx} = -\frac{Pa}{2}\int\left(\frac{x}{a}\right)^2 dx = -\frac{P}{6a}x^3 + C_1 \qquad (1)$$

ふたたび、両辺を積分して、

$$-EIv_{AB} = \int\left(-\frac{P}{6a}x^3 + C_1\right)dx = -\frac{P}{24a}x^4 + C_1x + C_2 \qquad (2)$$

積分定数 C_1, C_2 を決定するため、点 B（$x = a$）における以下の条件を適用する。

$$x = a \text{ で} \qquad \frac{dv_{AB}}{dx} = \theta_B\,, \quad \text{かつ} \quad v_{AB} = v_B$$

先に求めた値を用いて、上の条件と式(1),(2)より、

$$C_1 = \frac{2}{3}Pa^2\,, \quad C_2 = -\frac{7}{8}Pa^3$$

よって、

$$\theta_{AB} = \frac{dv_{AB}}{dx} = -\frac{1}{EI}\left(-\frac{P}{6a}x^3 + \frac{2}{3}Pa^2\right) \quad \therefore \theta_{AB} = \frac{P}{6EI}\left(\frac{1}{a}x^3 - 4a^2\right)$$

$$v_{AB} = -\frac{1}{EI}\left(-\frac{P}{24a}x^4 + \frac{2}{3}Pa^2x - \frac{7}{8}Pa^3\right) \quad \therefore v_{AB} = \frac{P}{24EI}\left(\frac{1}{a}x^4 - 16a^2x + 21a^3\right)$$

したがって、自由端：点 A（$x = 0$）におけるたわみ v_A は、

$$v_A = \frac{21Pa^3}{24EI} = \frac{7Pa^3}{8EI}$$

2022（R4）年度【2】略解

（1）	点 B $(x = 3a)$, $R_B = 17P$ 点 D $(x = 8a)$, $R_D = 33P$
（2）	略
（3）	略
（4）	自由端：点 A $(x = 0)$　固定端：点 C $(x = 2a)$ 支持モーメント：$M_C = -\frac{1}{2}Pa$
（5）	略
（6）	略
（7）	$v_A = \frac{7Pa^3}{8EI}$

2022（R4）年度【2】講評

SFD（せん断力図）と BMD（曲げモーメント図）に関する問い。
SFD と BMD の対応は押さえておく。代表的な点と性質を考慮して、図示する。
実際に曲げモーメントについて、x の関数を求めるのは、煩雑な計算を伴う。