2023 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

**科目名：材料力学　［ 1 / 2 ］**

(問題 [1], [2] は別々の答案用紙に解答すること．
解答に必要な物理量が別途必要な場合は各自定義した上で用いること．)

[1] テーパ部を有する全長 $L$ の中実丸棒 AB に対するねじりを考える．テーパ部 AC の長さを $nL\ (0<n<1)$，端面 A および端面 B における直径をそれぞれ $d$ および $md\ (m>1)$ とし，丸棒の横弾性係数を $G$ とする．

まず，図 1-1 に示すように端面 B を固定し，端面 A にトルク $T$ を作用させる．このとき以下の各問いに答えなさい．

(1) 端面 B に対する断面 C のねじれ角を求めなさい．

(2) 端面 B に対する端面 A のねじれ角を求めなさい．

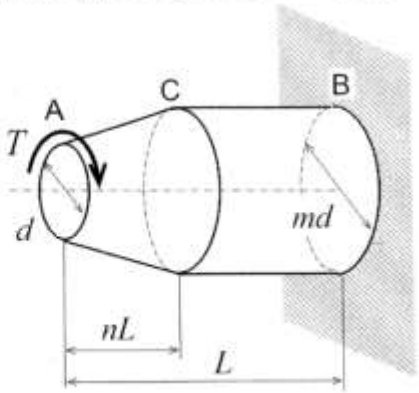


図1-1

次に，図 1-2 のように端面 A および端面 B を固定し，断面 C にトルク $T$ を作用させた．このとき以下の各問いに答えなさい．

(3) 端面 A および端面 B に生じる支持トルク $T_A$ および $T_B$ をそれぞれ求めなさい．

(4) 端面 A および端面 B の最大せん断応力が等しくなるために $n$ と $m$ が満たす条件を求めなさい．また，このときの断面 C における最大せん断応力を求めなさい．

(5) (4)において，断面 C 外周上の点 P(図中の四角箇所)における応力状態に対するモールの応力円を描き，同箇所の主応力の状態について説明しなさい．ただし，両端固定に伴って生じる軸方向応力については無視できるものとする．

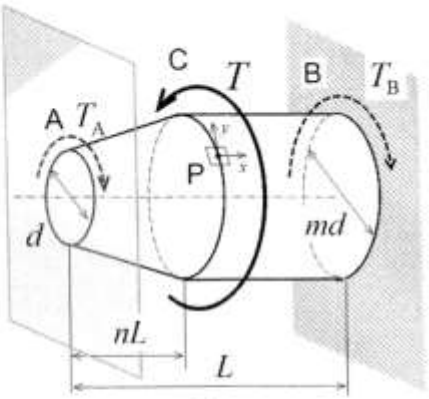


図1-2

**2023（R5）年度【１】問題〈テーパ棒〉**

図 1-1 に示すように端面 B 端を固定し、端面 A にトルク $T$ を作用させる。

（１）端面 B に対する断面 C のねじれ角を求めなさい。

トルク（力のモーメント）のつり合いより、CB 間の内トルクはいずれも $T$ となる。

ここで、比ねじれ角は、次式で表せる。

$$〈比ねじれ角〉\ \phi = \frac{T}{GI_p}$$

よって、端面 B に対する断面 C のねじれ角 $\varphi_{CB}$ は、次式で求められる。

$$\varphi_{CB} = \int_0^{(1-n)L} \frac{T}{GI_p} dx$$

丸棒の断面二次極モーメント $I_p$ は、直径を $d$ として次式で表せる。

$$〈丸棒〉\ I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

直径は $md$ ゆえ、CB 間における断面二次極モーメント $I_{p,CB}$ は、次式で表せる。

$$I_{p,CB} = \frac{\pi (md)^4}{32}$$

よって、$I_{p,CB}$ を代入して、

$$\varphi_{CB} = \frac{T}{G} \frac{32}{\pi m^4 d^4} (1-n)L$$

（２）端面 B に対する断面 A のねじれ角を求めなさい。

トルク（力のモーメント）のつり合いより、AC 間の内トルクはいずれも $T$ となる。

AC 間における任意の位置 $x$ における直径 $d(x)$ は、原点 $(x = 0)$ を C 点とすると、

$$d(x) = \frac{d - md}{nL} x + md = \frac{(1-m)d}{nL} x + md$$

よって、AC 間における断面二次極モーメント $I_{p,AC}$ は、次式で表せる。

$$\therefore I_{p,AC} = \frac{\pi}{32} \left( \frac{(1-m)d}{nL} x + md \right)^4$$

したがって、端面 C に対する断面 A のねじれ角 $\varphi_{AC}$ は次式で求められる。

$$\varphi_{AC} = \int_0^{nL} \frac{T}{GI_p} dx$$

これに、$I_{p,AC}$ を代入して、

$$\varphi_{AC} = \frac{32T}{G\pi} \int_0^{nL} \left( \frac{(1-m)d}{nL} x + md \right)^{-4} dx$$

$$= \frac{32T}{G\pi} \left[ \frac{1}{-3} \frac{nL}{(1-m)d^4} \left( \frac{1-m}{nL} x + m \right)^{-3} \right]_0^{nL} = -\frac{32T}{3G\pi} \frac{nL}{(1-m)d^4} \left( 1 - \frac{1}{m^3} \right)$$

$$= \frac{32T}{3G\pi} \frac{n(m^3-1)L}{m^3(m-1)d^4} = \frac{32TL}{3G\pi d^4} \frac{n(m^2+m+1)}{m^3}$$

端面 B に対する断面 A のねじれ角 $\varphi_{AB}$ は、

$$\varphi_{AB} = \varphi_{CB} + \varphi_{AC}$$

よって、（1）の結果を用いて、

$$\varphi_{AB} = \frac{T}{G} \frac{32}{\pi m^4 d^4} (1-n)L + \frac{32TL}{3G\pi d^4} \frac{n(m^2+m+1)}{m^3}$$

$$\therefore \varphi_{AB} = \frac{32TL}{3G\pi m^4 d^4} \{3(1-n) + nm(m^2+m+1)\}$$

次に、図 1-2 のように端面 A および端面 B を固定し、端面 C にトルク $T$ を作用させた。

（3）端面 A および端面 B に生じる支持トルクを $T_A$ および $T_B$ をそれぞれ求めなさい。

CB 間の内トルクは $-T_B$ となるので、端面 B に対する断面 C のねじれ角 $\varphi'_{CB}$ は、

（1）の結果を利用して、

$$\varphi'_{CB} = \frac{-T_B}{G} \frac{32}{\pi m^4 d^4} (1-n)L$$

AC 間の内トルクは $T_A$ となるので、端面 C に対する断面 A のねじれ角 $\varphi'_{AC}$ は、

（2）の結果を利用して、

$$\varphi'_{AC} = \frac{32T_A L}{3G\pi d^4} \frac{n(m^2+m+1)}{m^3}$$

ねじれ角 $\varphi'_{AC}$ および $\varphi'_{CB}$ の間の関係は、C 点で連続ゆえ、$\varphi'_{CA} = \varphi'_{CB}$

$$\therefore -\varphi'_{AC} = \varphi'_{CB}$$

よって、

$$-\frac{32T_A L}{3G\pi d^4}\frac{n(m^2+m+1)}{m^3} = \frac{-T_B}{G}\frac{32}{\pi m^4 d^4}(1-n)L$$

$$\therefore T_A = \frac{3(1-n)}{nm(m^2+m+1)}T_B$$

トルク（力のモーメント）のつり合いより、

$$T = T_A + T_B$$

以上、連立して、

$$\therefore T_A = \frac{3(1-n)}{3(1-n)+nm(m^2+m+1)}T$$

$$\therefore T_B = \frac{nm(m^2+m+1)}{3(1-n)+nm(m^2+m+1)}T$$

（4）端面 A および端面 B の最大せん断応力が等しくなるために $n$ と $m$ が満たす条件を求めなさい。また、このときの断面 C における最大せん断応力を求めなさい。

せん断応力 $\tau$ とトルク $T$ の関係は次式となる。ここで、中心軸からの距離を $r$ とする。

$$\tau = \frac{Tr}{I_p}$$

丸棒の断面二次極モーメント $I_p$ と極断面係数 $Z_p$ は、直径を $d$ として次式で表せる。

$$〈丸軸〉\ I_p = \frac{\pi d^4}{32},\quad Z_p = \frac{I}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16}$$

ねじりによる最大せん断応力 $\tau_{max}(x)$ は、丸軸の表面の位置で、次式となる。

$$\tau_{max}(x) = \frac{|T(x)|}{Z_p} = \frac{16|T(x)|}{\pi d^3}$$

・端面 A における最大せん断応力 $\tau_A$

$$\tau_A = \frac{T_A}{I_{p,A}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{16d}{\pi} \frac{1}{\left(\frac{(1-m)d}{nL} \cdot nL + md\right)^4} T_A = \frac{16d}{\pi d^4} T_A$$

・端面 B における最大せん断応力 $\tau_B$

$$\tau_B = \frac{T_B}{I_{p,CB}} \cdot \frac{md}{2} = \frac{16md}{\pi} \frac{1}{(md)^4} T_B$$

これらが等しいので、

$$\frac{16d}{\pi d^4} T_A = \frac{16md}{\pi} \frac{1}{(md)^4} T_B$$

$$\therefore T_A = \frac{1}{m^3} T_B$$

（3）の結果より、

$$\frac{3(1-n)}{3(1-n) + nm(m^2+m+1)} T = \frac{1}{m^3} \cdot \frac{nm(m^2+m+1)}{3(1-n) + nm(m^2+m+1)} T$$

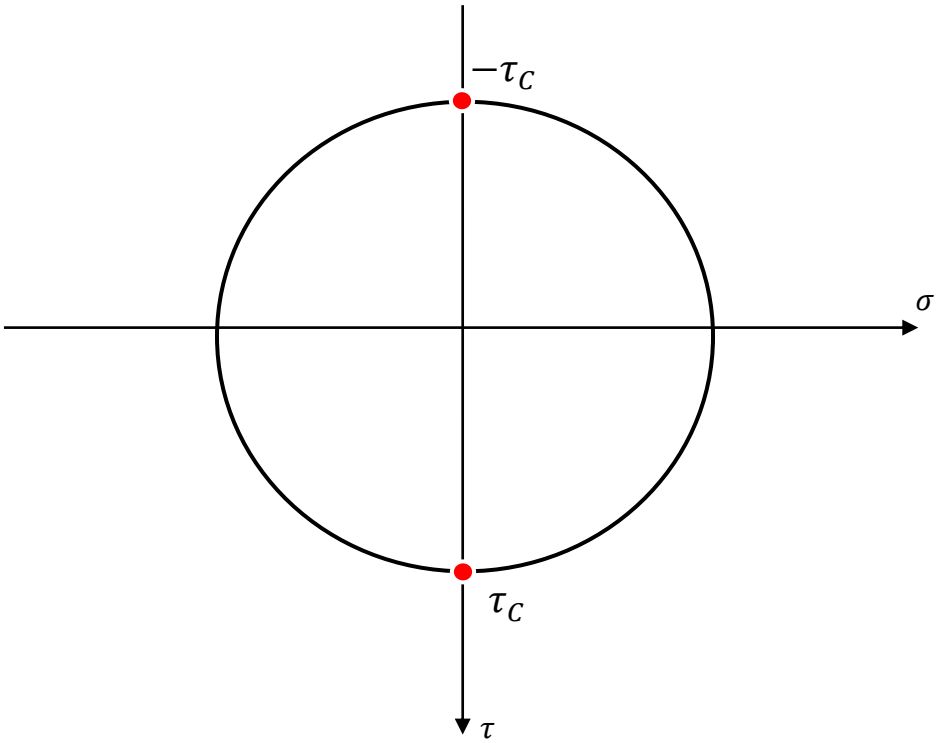
よって、$n$ と $m$ が満たす条件は、

$$\therefore 3m^2(1-n) = n(m^2+m+1)$$

また、このときの断面 C における最大せん断応力 $\tau_C$ は、

$$\tau_C = \frac{T}{I_{p,CB}} \cdot \frac{md}{2} = \frac{16}{\pi(md)^3} T$$

（５）（４）において、断面Ｃ外周上の点Ｐ（図中の四角箇所）における応力状態に対するモールの応力円を描き、同箇所の主応力の状態について説明しなさい。ただし、両端固定に伴って生じる軸方向応力については無視できるものとする。




**図：ねじりモーメントのみを受ける丸棒の応力円**

ねじりモーメントのみを受ける丸棒の表面は、せん断応力のみを受けることになる。

## 2023（R5）年度【１】略解

| | |
|---|---|
| （１） | $\varphi_{CB} = \dfrac{T}{G}\dfrac{32}{\pi m^4 d^4}(1-n)L$ |
| （２） | $\varphi_{AB} = \dfrac{32TL}{3G\pi m^4 d^4}\{3(1-n)+nm(m^2+m+1)\}$ |
| （３） | $T_A = \dfrac{3(1-n)}{3(1-n)+nm(m^2+m+1)}T$<br>$T_B = \dfrac{nm(m^2+m+1)}{3(1-n)+nm(m^2+m+1)}T$ |
| （４） | $3m^2(1-n) = n(m^2+m+1)$<br>$\tau_C = \dfrac{16}{\pi(md)^3}T$ |
| （５） | ねじりモーメントのみを受ける丸棒の表面は、せん断応力のみを受ける。 |

## 2023（R5）年度【１】講評

ねじりの問題であった。

テーパ棒は、断面積が変化するため断面二次モーメントが距離 $x$ の関数となる。

モールの応力円についても、最低限おさえておきたい。

2023 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

**科目名：材料力学　［ 2 / 2 ］**

（問題[1]，[2]は別々の答案用紙に解答すること．
解答に必要な記号・座標系がある場合は各自で定義すること．）

[2]　図 2-1 に示すように，長さ $L$[m]，曲げ剛性 $EI$（[Nm$^2$]，一定）のはり AB が，点 A で固定支持されている．点 A から距離 $a$ だけ離れた点 C までの AC 間に一様な分布外力ω [N/m]が，点 C に大きさ $P$[N]の集中外力がそれぞれ作用する場合について，次の問いに答えなさい．

(1) 点 A における支持力および支持モーメントを求めなさい．
(2) AB 間の曲げモーメント $M(x)$およびせん断力 $F(x)$を，点 A を原点とする座標 $x$ を用いて表しなさい．
(3) AB 間のたわみ曲線 $v(x)$を，点 A を原点とする座標 $x$ を用いて表しなさい．
(4) CB 間が $x$ 軸に対して平行となるときの $P$ の大きさを求めなさい．また，このときのたわみ曲線 $v(x)$の概形を解答欄の指定箇所に描きなさい．点 C のたわみの大きさおよび，たわみ曲線の変曲点の位置を明記すること．

図 2-2 に示すように，図 2-1 から点 C の集中外力を取り除き，長さ $L$[m]，曲げ剛性 $EI$（[Nm$^2$]，一定）のはり DE 上に，点 D から距離 $a$ だけ離れた点 F で移動支持を用いて，はり AB を点 C で支持した．はり DE は点 D で固定支持されており，はり DE に対する移動支持の影響は集中外力として扱えるものとして，次の問いに答えなさい．
(5) 点 C の支持力を求める不静定問題を解くために必要な条件を挙げなさい．
(6) (5)の条件を用いて，点 C での支持力を求めなさい．

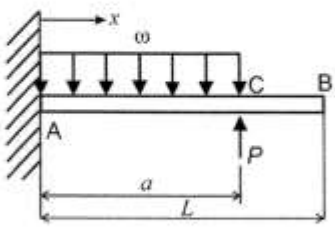



図 2-1

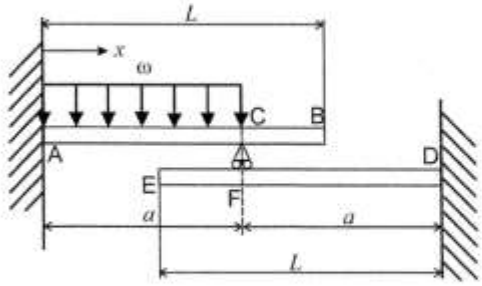



図 2-2

## 2023（R5）年度【２】問題〈曲げによるたわみ〉

【１】図 2-1 に示すように、長さ $L$[m], 曲げ剛性 $EI$ [Nm$^2$]（一定）のはり AB が、
点 A で固定支持されている。点 A から距離 $a$ だけ離れた点 C までの AC 間に
一様な分布外力 $w$[N/m] が、点 C に大きさ $P$ [N] の集中外力がそれぞれ作用する。

（１）点 A における支持力および支持モーメントを求めなさい。

点 A における支持力および支持モーメントを $H_A, R_A, M_A$ とする。

ここで、水平方向の支持力 $H_A = 0$ である。

自由体図において、鉛直方向の力のつり合いより、

$$R_A + P = \int_0^a w \ dx = wa$$

点 A における、力のモーメントのつり合いより、

$$M_A = aP - \int_0^a x \cdot w \ dx = aP - \frac{1}{2}wa^2$$

よって、

$$\therefore R_A = wa - P, \qquad M_A = aP - \frac{1}{2}wa^2$$

（２）AB 間の曲げモーメント $M(x)$, およびせん断力 $F(x)$ を、
点 A を原点とする座標 $x$ を用いて表しなさい。

〈AC 間〉AC 間のある位置 $x$ を考える。

鉛直方向の力のつり合いより、

$$F_{AC} = R_A - \int_0^x w \ dx = R_A - wx$$

点 A における、力のモーメントのつり合いより、

$$M_{AC} = M_A + x \cdot F_{AC} + \int_0^x x \cdot w \ dx = M_A + x(R_A - wx) + \frac{1}{2}wx^2$$

（１）より、$R_A$ および $M_A$ を代入する。

$$\therefore F_{AC} = -w(x-a) - P, \quad \therefore M_{AC} = -\frac{1}{2}w(x-a)^2 - P(x-a)$$

〈CB 間〉CB 間のある位置 $x$ を考える。

自由体図において、鉛直方向の力のつり合いより、

$$F_{CB} = R_A + P - \int_0^a w\,dx = R_A + P - wa$$

点 A における、力のモーメントのつり合いより、

$$M_{CB} = M_A - aP + xF_{CB} + \int_0^a x \cdot w\ dx = M_A - aP + xF_{CB} + \frac{1}{2}wa^2$$

（1）より、$R_A$ および $M_A$ を代入する。

$$\therefore F_{CB} = 0, \quad \therefore M_{CB} = 0$$

（3）AB 間のたわみ曲線 $v(x)$ を、点 A を原点とする座標 $x$ を用いて表しなさい。

〈AC 間〉

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

（2）より、

$$-EI\frac{d^2v_{AC}}{dx^2} = M_{AC} = -\frac{1}{2}w(x-a)^2 - P(x-a)$$

両辺を積分して、

$$-EI\frac{dv_{AC}}{dx} = \int\left\{\frac{1}{2}w(x-a)^2 - P(x-a)\right\}dx = -\frac{1}{6}w(x-a)^3 - \frac{P}{2}(x-a)^2 + C_1 \qquad (1)$$

ふたたび、両辺を積分して、

$$-EIv_{AC} = \int\left\{\frac{1}{6}w(x-a)^3 - \frac{P}{2}(x-a)^2 + C_1\right\}dx = -\frac{1}{24}w(x-a)^4 - \frac{P}{6}(x-a)^3 + C_1x + C_2 \quad (2)$$

積分定数 $C_1, C_2$ を決定するため、

点 A（$x = 0$）における以下の条件を適用する。

$$x = 0 \text{ で} \qquad \frac{dv_{AC}}{dx} = 0, \quad v_{AC} = 0$$

上の条件と式(1),(2)より、

$$C_1 = -\frac{1}{6}wa^3 + \frac{P}{2}a^2\,, \quad C_2 = \frac{1}{24}wa^4 - \frac{P}{6}a^3$$

よって、

$$\theta_{AC} = -\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}w(x-a)^3 - \frac{P}{2}(x-a)^2 + \left(-\frac{1}{6}wa^3 + \frac{P}{2}a^2\right)\right\}$$

$$\therefore v_{AC} = -\frac{1}{EI}\left\{-\frac{1}{24}w(x-a)^4 - \frac{P}{6}(x-a)^3 + \left(-\frac{1}{6}wa^3 + \frac{P}{2}a^2\right)x + \left(\frac{1}{24}wa^4 - \frac{P}{6}a^3\right)\right\}$$

ここで、点 C $(x = a)$ におけるたわみ $v_C$, たわみ角 $\theta_C$ を求めておく。

$$\therefore \theta_C = -\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}wa^3 + \frac{P}{2}a^2\right) \quad \therefore v_C = -\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{8}wa^4 + \frac{1}{3}Pa^3\right)$$

〈CB 間〉（２）より、

$$-EI\frac{d^2v_{CB}}{dx^2} = M_{CB} = 0$$

両辺を積分して、

$$-EI\frac{dv_{CB}}{dx} = -EI\theta_{CB} = C_3 \tag{3}$$

ふたたび、両辺を積分して、

$$-EIv_{CB} = C_3x + C_4 \tag{4}$$

積分定数 $C_3, C_4$ を決定するため、点 C $(x = a)$ での結果を適用する。

$$\therefore \theta_C = -\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}wa^3 + \frac{P}{2}a^2\right) \quad \therefore v_C = -\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{8}wa^4 + \frac{1}{3}Pa^3\right)$$

上の条件と式(3),(4)より、

$$C_3 = -\frac{1}{6}wa^3 + \frac{P}{2}a^2, \quad C_4 = \frac{1}{24}wa^4 - \frac{P}{6}a^3$$

$$\therefore v_{CB} = -\frac{1}{EI}\left\{\left(-\frac{1}{6}wa^3 + \frac{P}{2}a^2\right)x + \left(\frac{1}{24}wa^4 - \frac{P}{6}a^3\right)\right\}$$

（4）CB 間が $x$ 軸に対して平行となるときの $P$ の大きさを求めなさい。
また、このときのたわみ曲線 $v(x)$ の概形を解答欄の指定箇所に描きなさい。
点 C のたわみの大きさおよび、たわみ曲線の変曲点の位置を明記すること。

CB 間が $x$ 軸に対して平行となるとき、点 C $(x=a)$ におけるたわみ角 $\theta_C$ が 0 となる。
（3）より、

$$\theta_C = -\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}wa^3 + \frac{P}{2}a^2\right) = 0$$

を解いて、

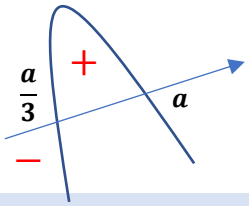
$$\therefore P = \frac{1}{3}wa$$

よって、点 C $(x=a)$ におけるたわみ $v_C$ は、$P$ を代入して、

$$v_C = -\frac{1}{EI}\left\{-\frac{1}{8}wa^4 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}wa\right)a^3\right\} = \frac{1}{72EI}wa^4$$（点 C のたわみの大きさ）

たわみの変曲点が 0 となるとき、二階微分である曲げモーメントの符号が変化する点ゆえ、
（2）の結果より、変曲点の座標は、$P$ を代入して求めると、

$$M_{AC} = -\frac{1}{2}w(x-a)^2 - \frac{1}{3}wa(x-a) = 0$$




$$\therefore x = \frac{a}{3}$$（変曲点の座標）

このときのたわみ曲線 $v(x)$ の概形は、

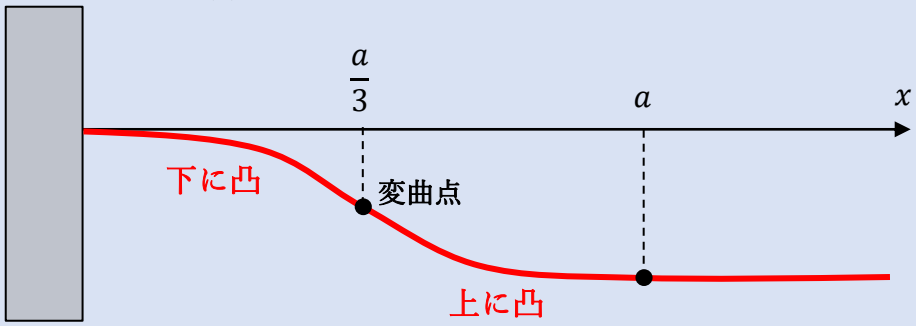


図 2-2 に示すように、図 2-1 から点 C の集中外力を取り除き、
長さ $L$ [m], 曲げ剛性 $EI$ [Nm$^2$]（一定）のはり DE 上に、点 D から距離 $a$ だけ離れた点 F で移動支持を用いて、はり AB を点 C で支持した。はり DE は点 D で固支持定されており、はり DE に対する移動支持の影響は集中外力として扱えるものとする。

（5）点 C の支持力を求める不静定問題を解くために必要な条件を挙げなさい。

はり AB の点 C におけるたわみ $v_C$ と、はり DE の点 F におけるたわみ $v_F$ が等しいこと。

$$v_C = v_F$$

（6）（5）の条件を用いて、点 C での支持力を求めなさい。

点 F におけるたわみ $v_F$ は、自由端に集中荷重を受ける片持ちはりのたわみとして求める。

はり DE に対する移動支持の影響は集中外力 $P$ とすると、
点 F $(x = a)$ におけるたわみ $v_F$ は、

$$v_F = \frac{Pa^3}{3EI}$$

移動支持の影響として扱う集中外力 $P$ は、はり AB の点 C での支持力 $R_C$ に等しいので、
上式と（3）より、$v_C = v_F$ にそれぞれ代入して、

$$-\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{8}wa^4 + \frac{1}{3}R_C a^3\right) = \frac{R_C a^3}{3EI} \quad \therefore 3wa - 8R_C = 8R_C$$

$$\therefore R_C = \frac{3}{16}wa$$

## 2023（R5）年度【２】略解

| | |
|---|---|
| （１） | $R_A = wa - P, \qquad M_A = aP - \frac{1}{2}wa^2$ |
| （２） | $F_{AC} = -w(x-a) - P, \quad M_{AC} = -\frac{1}{2}w(x-a)^2 - P(x-a)$<br>$F_{CB} = 0, \quad M_{CB} = 0$ |
| （３） | $v_{AC} = -\frac{1}{EI}\left\{-\frac{1}{24}w(x-a)^4 - \frac{P}{6}(x-a)^3 + \left(-\frac{1}{6}wa^3 + \frac{P}{2}a^2\right)x + \left(\frac{1}{24}wa^4 - \frac{P}{6}a^3\right)\right\}$<br>$v_{CB} = -\frac{1}{EI}\left\{\left(-\frac{1}{6}wa^3 + \frac{P}{2}a^2\right)x + \left(\frac{1}{24}wa^4 - \frac{P}{6}a^3\right)\right\}$ |
| （４） | $P = \frac{1}{3}wa$<br>$v_C = \frac{1}{72EI}wa^4$（点 C のたわみの大きさ），$x = \frac{a}{3}$（変曲点の座標） |
| （５） | 点 C におけるたわみ $v_C$ と、点 F におけるたわみ $v_F$ が等しいこと。<br>$v_C = v_F$ |
| （６） | $R_C = \frac{3}{16}wa$ |

## 2023（R5）年度【２】講評

| |
|---|
| たわみに関する基本的な問い。基本的ゆえに計算ミスに気を付けたい。<br>強引に式を整理しない。そのままでいいところはそのままでいい。<br>たわみ曲線には慣れておく。適合条件には慣れておく。 |