平成 31 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：熱力学　［ 1 / 2 ］

（問題 [1], [2] は別々の答案用紙に解答すること.）

[1] 図 1 に示すように，周囲圧力 P_0 [Pa]中に，シリンダおよび可動ピストンが置かれている．ピストンにより，理想気体（体積 V_1 [m^3]）が周囲圧力と同じ P_0 [Pa]で閉じ込められている．これを状態 1 とする．その後，以下に示す過程 A～C を行った．全ての過程は，準静的過程であるとみなす．



図 1

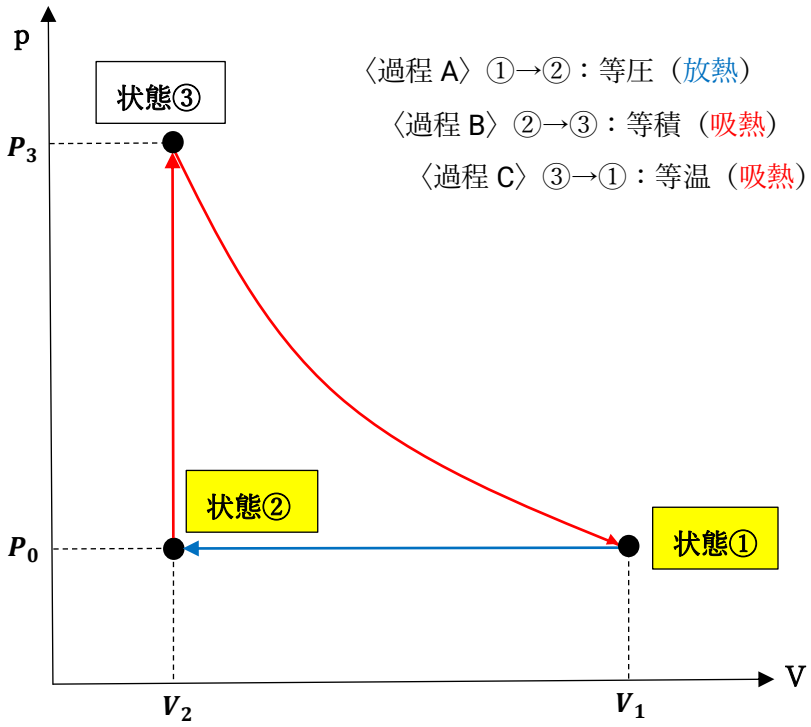
過程 A：シリンダ壁を通して気体を冷却し，等圧状態で圧縮したところ，シリンダ内の体積が V_2 [m^3]となった（状態 2）.
過程 B：過程 A の後，ピストンを固定し，気体の圧力が P_3 [Pa]になるまでシリンダ壁を通して気体を加熱した（状態 3）.
過程 C：過程 B の後，等温変化させたところ，状態 1 となり変化が終了した.

以下の問いに答えなさい．理想気体の比熱比はκとする．各設問で使って良い記号は P_0, V_1, V_2, κとする.

(1) このサイクルの P-V 線図を描きなさい．状態および変化の方向を明記すること.
(2) 過程 A において，気体が周囲にした仕事 W_A [J]を求めなさい.
(3) 過程 A において，気体の放熱量 Q_A [J]を求めなさい.
(4) 過程 B において，気体が周囲にした仕事 W_B [J]を求めなさい.
(5) 過程 B において，気体への加熱量 Q_B [J]を求めなさい.
(6) 過程 C において，気体が周囲にした仕事 W_C [J]を求めなさい.
(7) このサイクルの熱効率 η を求めなさい.

2019（H31）年度【1】問題〈ピストン・シリンダ系〉

（1）このサイクルの $p-V$ 線図を描きなさい。状態および変化の方向を明示すること。



〈過程 A〉①→②：等圧（放熱）

〈過程 B〉②→③：等積（吸熱）

〈過程 C〉③→①：等温（吸熱）

	ΔU	W_{out}	Q_{in}
①→②：等圧	$\Delta U = mc_v\Delta T\ (<0)$	$W_{out} = p\Delta V\ (<0)$	$Q_{in} = mc_p\Delta T\ (<0)$
②→③：等積	$\Delta U = mc_v\Delta T\ (>0)$	0	$Q_{in} = mc_v\Delta T\ (>0)$
③→①：等温	0	$W_{out} = \int pdV\ (>0)$	W_{out}

・比熱比

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

・マイヤーの関係　　$c_p = c_v + R$

以上 2 式より

$$c_v = \frac{R}{\kappa - 1} \qquad c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1}R$$

（２）過程 A において、気体が周囲にした仕事 W_A [J] を求めなさい。

気体は周囲から**仕事をされた**が、求めるのは気体が周囲に**した**仕事であることに注意する。

等圧過程において、気体がした仕事は、

$$W_{out} = p\Delta V$$

よって、

$$\therefore W_A = -P_0(V_1 - V_2)\ [\mathrm{J}]$$

（３）過程 A において、気体の放熱量 Q_A [J] を求めなさい。

求めるのは気体の**放熱量** Q_{out} であることに注意する。

等圧過程において、気体の吸熱量 Q_{in} は、$Q_{in} = mc_p\Delta T$

$$Q_{in} = mc_p(T_2 - T_1)$$

比熱比の定義とマイヤーの関係より、

$$Q_{in} = m\frac{\kappa}{\kappa - 1}R(T_2 - T_1) = \frac{\kappa}{\kappa - 1}(mRT_2 - mRT_1)$$

ここで、気体の状態方程式より、$P_0V_1 = mRT_1$（状態①） $P_0V_2 = mRT_2$（状態②）

$$Q_{in} = \frac{\kappa}{\kappa - 1}(P_0V_2 - P_0V_1)$$

$Q_{out} = -Q_{in}$ であるので、

$$\therefore Q_A = \frac{\kappa}{\kappa - 1}P_0(V_1 - V_2)\ [\mathrm{J}]$$

【別解】熱力学の第 1 法則 $\Delta U = Q_{in} - W_{out}$ より、Q_A を求める。

まず、ΔU を求める。

$$\Delta U = mc_v\Delta T = mc_v(T_2 - T_1)$$

比熱比の定義とマイヤーの関係より、

$$\Delta U = m\frac{R}{\kappa - 1}(T_2 - T_1) = \frac{1}{\kappa - 1}(mRT_2 - mRT_1)$$

ここで、気体の状態方程式より、$P_0V_1 = mRT_1$（状態①） $P_0V_2 = mRT_2$（状態②）

$$\therefore \Delta U = \frac{P_0}{\kappa - 1}(V_2 - V_1)\ [\mathrm{J}]$$

次に、（２）で求めた $W_A = P_0(V_2 - V_1)$ を、$\Delta U = Q_{in} - W_{out}$ に代入すると、

$$\frac{P_0}{\kappa - 1}(V_2 - V_1) = Q_{in} - P_0(V_2 - V_1)$$

$$Q_{in} = \frac{1 + (\kappa - 1)}{\kappa - 1} P_0(V_2 - V_1)$$

$Q_{out} = -Q_{in}$ であるので、

$$\therefore Q_A = \frac{\kappa}{\kappa - 1} P_0(V_1 - V_2)\ [\mathrm{J}]$$

（別解終わり）

（４）過程 B において、気体が周囲にした仕事 W_B [J] を求めなさい。

等積過程なので、周囲に仕事は行われない。

$$\therefore W_B = 0\ [\mathrm{J}]$$

（５）過程 B において、気体への加熱量 Q_B [J] を求めなさい。

求めるのは気体の**放熱量** Q_{out} であることに注意する。

等圧過程において、気体の吸熱量 Q_{in} は、

$$Q_{in} = mc_v\Delta T$$

$$Q_{in} = mc_v(T_3 - T_2)$$

比熱比の定義とマイヤーの関係より、

$$Q_{in} = m\frac{R}{\kappa - 1}(T_3 - T_2) = \frac{1}{\kappa - 1}(mRT_3 - mRT_2)$$

②→③は等温過程ゆえ、$T_0 = T_3$ なので、

$$Q_{in} = \frac{1}{\kappa - 1}(mRT_0 - mRT_2)$$

ここで、気体の状態方程式より、$P_0V_1 = mRT_1$（状態①） $P_0V_2 = mRT_2$（状態②）

$$Q_{in} = \frac{1}{\kappa - 1}(P_0V_1 - P_0V_2)$$

$$\therefore Q_B = \frac{1}{\kappa - 1} P_0(V_1 - V_2)\ [\mathrm{J}]$$

（６）過程 C において、気体が周囲にした仕事 W_C [J] を求めなさい。

等温過程において、気体がした仕事は、

$$W = \int pdV \qquad \therefore W_C = \int_{V_2}^{V_1} pdV$$

ここで、気体の状態方程式より、$pV = mRT_{const.}$

$$W_C = \int_{V_2}^{V_1} \frac{mRT_{const.}}{V} dV = mRT_{const.}[\ln V]_{V_2}^{V_1} = P_0V_1(\ln V_1 - \ln V_2)$$

$$\therefore W_C = P_0V_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) \text{ [J]}$$

（７）このサイクルの熱効率 η を求めなさい。

熱効率 η は以下のように表される。

$$\eta = \frac{W}{Q_{in}} = \frac{W_{out} - W_{in}}{Q_{in}} \qquad \therefore \eta = \frac{W_C - (-W_A)}{Q_B + Q_C} = \frac{W_C + W_A}{Q_B + Q_C}$$

$Q_C = W_C$ なので、（２）（５）（６）で求めた各値を代入する。

$$\therefore \eta = \frac{V_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) - (V_1 - V_2)}{\frac{1}{\kappa - 1}(V_1 - V_2) + V_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}$$

【別解】熱効率 η は以下のようにも表現できる。

$$\eta = \frac{Q_{in} - Q_{out}}{Q_{in}} = 1 - \frac{Q_{out}}{Q_{in}}$$

$$\eta = \frac{Q_B + Q_C - Q_A}{Q_B + Q_C} = 1 - \frac{Q_A}{Q_B + Q_C}$$

$$\therefore \eta = \frac{\mathbf{\frac{1}{\kappa - 1}} P_0(V_1 - V_2) + P_0V_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) - \mathbf{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} P_0(V_1 - V_2)}{\frac{1}{\kappa - 1} P_0(V_1 - V_2) + P_0V_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}$$

（別解終わり）

2019（H31）年度【１】略解

（１）	略
（２）	$W_A = -P_0(V_1 - V_2)$ [J]
（３）	$Q_A = \frac{\kappa}{\kappa - 1} P_0(V_1 - V_2)$ [J]
（４）	$W_B = 0$ [J]
（５）	$Q_B = \frac{1}{\kappa - 1} P_0(V_1 - V_2)$ [J]
（６）	$W_C = P_0 V_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$ [J]
（７）	$\eta = \frac{V_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) - (V_1 - V_2)}{\frac{1}{\kappa - 1}(V_1 - V_2) + V_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}$

2019（H31）年度【１】講評

比熱が直接与えられておらず、比熱比、マイヤーの関係を利用するところや、仕事を積分で求めるところ以外は、高校熱力学で扱われるような標準問題レベルである。
使用できる文字の制限や符号のミスなどに注意すれば、難なく完答できただろう。

平成 31 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：熱力学　［ 2 / 2 ］

（問題 [1], [2] は別々の答案用紙に解答すること.）

[2] 周囲環境（温度 T_0 [K], 圧力 P_0 [Pa]）と平衡状態にある理想気体（気体定数 R [J/(kg·K)], 比熱比 κ）を，環境温度，高圧（圧力 P_S [Pa]）で供給するシステムを構築する．供給流量は m [kg/s]とする．圧縮機およびタービンでの過程は可逆断熱過程とし，システムから外界への放熱および流路での圧力損失は考慮しない．以下の問いに答えなさい．

(1) 熱交換器を通過する理想気体の温度 T [K]と比エントロピー s [J/(kg·K)]の関係式を導出しなさい．

(2) この理想気体について，このシステムを実現するフローを図 2 のうち 2 つの要素を使って描きなさい．

(3) この理想気体の状態変化について T-S 線図，P-V 線図を描きなさい．ここで，S はエントロピー[J/K]，V は体積[m^3]である．

(4) この理想気体の状態変化に要する動力 W [W]を m, R, κ, T_0, P_0, P_S で表しなさい．

(5) 熱交換器での熱交換量 $\dot{Q}$ [W]を m, R, κ, T_0, P_0, P_S で表しなさい．

(6) 圧縮機およびタービンでの過程が不可逆断熱過程である場合の T-S 線図を描きなさい．
また，可逆断熱過程である場合に対する温度およびエネルギー量の差異を説明しなさい．



(a) Heat exchanger　(b) Compressor　(c) Turbine

図 2 Components used in energy system

2019（H31）年度【２】問題〈定常流動系におけるフロー〉

（１）熱交換器を通過する理想気体の温度 T [K] と比エントロピー s [J/(kg･K)] の関係式を導出しなさい。

エントロピー変化は次式である。

$$ds = \frac{dq}{T}$$

よって、**熱交換器では等圧過程**であるので、

$$ds = \frac{dq}{T} = \frac{c_p dT}{T} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R \cdot \frac{dT}{T}$$

したがって、温度 T と比エントロピー s の関係式は次式となる。

$$\therefore ds = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R \cdot \frac{dT}{T}$$

比エントロピー s は次式で求まる。

$$s = \int ds = \int \frac{dq}{T}$$

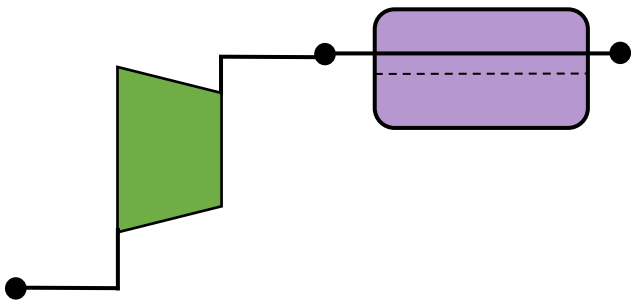
したがって、C を積分定数として、

$$s = \int ds = \int \frac{\kappa}{\kappa - 1} R \cdot \frac{dT}{T} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R \int \frac{dT}{T} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R \ln T + C \quad \therefore s = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R \ln T + C$$

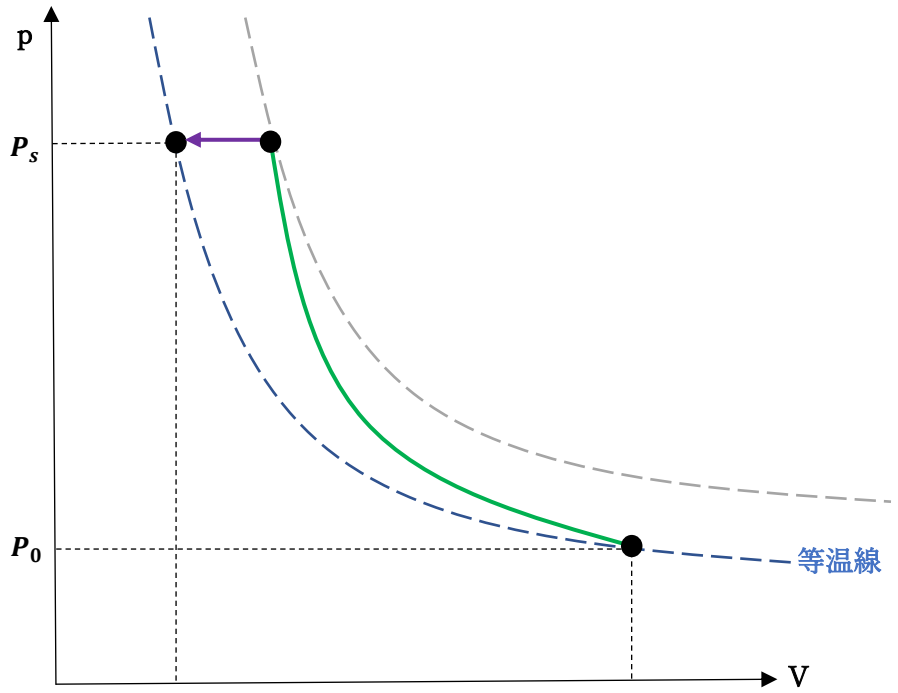
（２）この理想気体について、このシステムを実現するフローを図２のうち２つの要素を使って描きなさい。

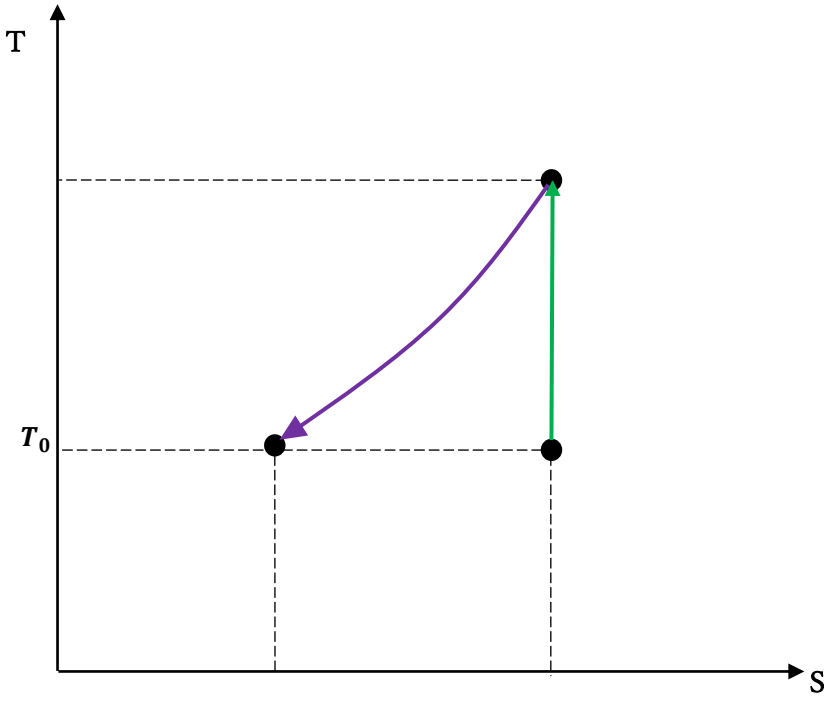
周囲環境と平衡状態にある理想気体を、環境温度、高圧で供給するシステムを作る。

①**圧縮機**（Compressor）で断熱圧縮→②**熱交換器**（Heat exchanger）で等圧冷却



（3）この理想気体の状態変化について $T-S$ 線図、$P-V$ 線図を描きなさい。
ここで、S はエントロピー [J/K]、V は体積 [m^3] である。





（４）この理想気体の状態変化に要する動力 $\dot{W}$ [W] を $m, R, \kappa, T_0, P_0, P_s$ で表しなさい。

①圧縮機で**断熱圧縮**　→　②熱交換器で**等圧圧縮**

この理想気体の状態変化に要する動力 $\dot{W}$ は、①、②で気体がされた仕事である。

過程①は断熱過程ゆえ、

$$Q_{in} = 0$$

定常流動系における熱力学の第１法則 $\Delta H = Q_{in} + W_{in}$ より、W_{in} を求める。よって、

$$W_{in} = \Delta H$$

変化後の温度を T_s とすると、

$$W_{in} = \Delta H = mc_p\Delta T = m\frac{\kappa}{\kappa-1}R(T_s - T_0)$$

ポアソンの法則より、

$$P \cdot v^{\kappa} = const.$$

理想気体の状態方程式を用いて、

$$P \cdot \left(\frac{RT}{Pv}\right)^{\kappa} = const.$$

$$P^{1-\kappa} \cdot T^{\kappa} = const.$$

よって、以下の関係式が成り立つ。

$$P_0{}^{1-\kappa} \cdot T_0{}^{\kappa} = P_S{}^{1-\kappa} \cdot T_S{}^{\kappa}$$

$$\therefore T_S{}^{\kappa} = T_0{}^{\kappa}\left(\frac{P_0}{P_S}\right)^{1-\kappa} \quad \therefore T_S = T_0\left(\frac{P_0}{P_S}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}$$

したがって、T_s を代入して、

$$\therefore W_C = m\frac{\kappa}{\kappa-1}RT_0\left\{\left(\frac{P_0}{P_S}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1\right\} \text{ [W]}$$

過程②は等圧過程ゆえ、定常流動系において、工業仕事 W_H は、

$$W_H = 0 \text{ [W]}$$

以上より、

$$\dot{W} = W_C + W_H$$

$$\therefore \dot{W} = m\frac{\kappa}{\kappa-1}RT_0\left\{\left(\frac{P_0}{P_S}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1\right\} \text{ [W]}$$

【別解】過程①と過程②を分けずに考える。

熱力学の第 1 法則 $\Delta H = Q_{in} + W_{in}$ より、W_{in} を求める。

変化前後で温度は変わらないため、$\Delta H = 0$

よって、過程②のみで熱の出入りがあることに注意して、

$$W_{in} = -Q_{in} = -mc_p\Delta T = -m\frac{\kappa}{\kappa-1}R(T_0 - T_S) = m\frac{\kappa}{\kappa-1}R(T_s - T_0)$$

$$\therefore \dot{W} = m\frac{\kappa}{\kappa-1}RT_0\left\{\left(\frac{P_0}{P_S}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1\right\}$$

※工業仕事の定義より求めてもよい。

（5）熱交換器での熱交換量 $\dot{Q}$ [W] を $m, R, \kappa, T_0, P_0, P_s$ で表しなさい。

過程②は、等圧放熱過程ゆえ、交換量を求めることに注意して、

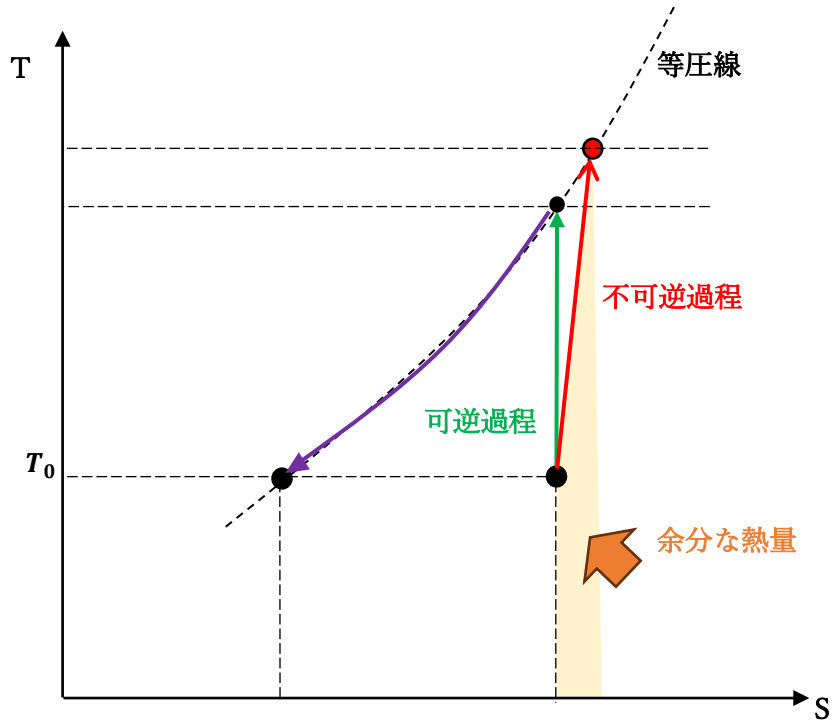
$$\dot{Q} = -mc_p\Delta T = -m\frac{\kappa}{\kappa-1}R(T_0 - T_S)$$

よって、T_s を代入して、

$$\therefore \dot{Q} = m\frac{\kappa}{\kappa-1}RT_0\left\{\left(\frac{P_0}{P_S}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1\right\} \text{ [W]}$$

（※動力 $\dot{W}$ と一致するのは熱力学第一法則よりアタリマエ）

（6）圧縮機およびタービンでの過程が不可逆断熱過程である場合の $T-S$ 線図を描きなさい。また可逆断熱過程である場合に対する温度およびエネルギー量の差異を説明しなさい。



不可逆断熱過程である場合は、エントロピーが増大する。(熱力学第二法則)
よって、圧縮機出口温度は可逆過程と比べて大きくなる。
また、変化前後で同じ環境温度なので、必要なエネルギー量は多くなる。(熱力学第一法則)

~~気体がされた仕事がすべて内部エネルギーの増加に寄与するわけではないため、~~
~~変化後の温度は、可逆断熱過程である場合と比べて、小さくなる。~~

2019（H31）年度【２】略解

（１）	$ds = \dfrac{\kappa}{\kappa - 1} R \cdot \dfrac{dT}{T}$ [J/(kg · K)]
（２）	略
（３）	略
（４）	$\dot{W} = m \dfrac{\kappa}{\kappa - 1} RT_0 \left\{ \left(\dfrac{P_0}{P_S} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1 \right\}$ [W]
（５）	$\dot{Q} = m \dfrac{\kappa}{\kappa - 1} RT_0 \left\{ \left(\dfrac{P_0}{P_S} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1 \right\}$ [W]
（６）	不可逆断熱過程である場合は、エントロピーが増大する。 （熱力学第二法則） よって、圧縮機出口温度は可逆過程と比べて大きくなる。 変化前後で同じ環境温度なので、必要なエネルギー量は多くなる。 （熱力学第一法則）

2019（H31）年度【２】講評

フロー図や$T - S$線図の取り扱いに関して、答えづらい問題であったと思われる。
定常流動系における熱力学の第一法則の適用やエントロピーの定義など、
基本的な知識は満遍のない学習が必要となる。
可逆過程・不可逆過程の違いも熟知しておかなければならない。