2022年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：熱力学　［ 1 / 2 ］

（問題[1]と問題[2]は別々の答案用紙に解答すること.）

[1] 準静的過程に従う閉じた系の内部エネルギーをU, 絶対温度をT, 圧力をP, 体積をV, エンタルピーをH, エントロピーをS, ヘルムホルツの自由エネルギーをF, ギブスの自由エネルギーをGとする. 以下の設問に答えなさい.

(1) Hの定義式を書きなさい.

(2) Fの定義式を書きなさい.

(3) Gの定義式を書きなさい.

(4) 熱力学第1法則を利用して, dUをS,T,P,Vを用いて表しなさい.

(5) 等温過程における系のFの減少は何に使われているか答えなさい.

(6) 以下の関係式(a), (b), (c)が成り立つことを証明しなさい.

(a) $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V$　(b) $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_G = \frac{S}{V}$　(c) $\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P$

(7) PとTの関数である物理量$K(P,T)$が状態量であるための必要十分条件を示しなさい.

2022（R4）年度【１】問題〈熱力学の一般関係式〉

（１）H の定義式を書きなさい。

エンタルピー H は、

$$\therefore H = U + PV$$

（２）F の定義式を書きなさい。

ヘルムホルツの自由エネルギー F は、

$$\therefore F = U - TS$$

（３）G の定義式を書きなさい。

ギブスの自由エネルギー G は、

$$\therefore G = H - TS$$

（４）熱力学第１法則を利用して、dU をS,T,P,V を用いて表しなさい。

熱力学第１法則より、

$$dU = dQ - PdV$$

ここで、エントロピーの定義式は、次式となる。

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

以上、２式より、

$$\therefore dU = TdS - PdV$$

【補足】

（６）で必要となるため、dH をS,T,P,V を用いて表しておく。

熱力学第１法則より、

$$dH = dQ + VdP$$

ここで、エントロピーの定義式は、次式となる。

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

以上、２式より、

$$\therefore dH = TdS + VdP$$

（5）等温過程における系の F の減少は何に使われているか答えなさい。

（2）より、ヘルムホルツの自由エネルギーの定義式は、次式となる。

$$F = U - TS$$

F の変化量を考える。

$$dF = d(U - TS) = dU - TdS - SdT$$

ここで、等温過程（$dT = 0,\ dU = 0$）なので、

$$dF - -TdS = -T\frac{dQ}{T} = -dQ \quad \left(\because dS = \frac{dQ}{T}\right)$$

熱力学第 1 法則より。等温過程においては、$-dQ = -PdV = -W_{out}$ が成立する。

$$\therefore -dF = W_{out}$$

よって、等温過程における系の F の減少は、系が外部にする（最大）仕事に使われる。

（6）以下の関係式（a），(b)，(c）が成り立つことを証明しなさい。

$$(a)\ \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V$$

（4）で求めた結果を利用する。

$$dU = TdS - PdV$$

U が状態量であるための条件（dU が全微分であるための条件）として、次式が成り立つ。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = \left(\frac{\partial(-P)}{\partial S}\right)_V$$

$$\therefore \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V$$

$$(b)\ \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_G = \frac{S}{V}$$

（3）より、ギブスの自由エネルギーの定義式は、次式となる

$$G = H - TS$$

G の変化量を考える。

$dG = d(H - TS) = dH - TdS - SdT = VdP - SdT$ （∵（4）補足）

$$\therefore dG = VdP - SdT$$

G が状態量であるための条件（dG が全微分であるための条件）として、次式が成り立つ。

G 一定（$dG = 0$）のとき、

$$0 = VdP - SdT$$

両辺 dT で除して整理すると、次式となる。

$$\frac{dP}{dT} = \frac{S}{V}$$

G 一定なので、書き直して、

$$\therefore \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_G = \frac{S}{V}$$

$$(c)\ \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P$$

（４）で求めた結果を利用して、(b) 同様にする。

$$dU = TdS - PdV$$

V 一定（$dV = 0$）のとき、

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T$$

（４）【補足】で求めた結果を利用する。

$$dH = TdS + VdP$$

P 一定（$dP = 0$）のとき、

$$\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P = T$$

以上、２式より、

$$\therefore \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P$$

（７）P と T の関数である物理量 $K(P,T)$ が状態量であるための必要十分条件を示しなさい。

（６）でも示したように、物理量 $K(P,T)$ が状態量であるための（必要十分）条件は、$dK = MdP + NdT$ が全微分になる条件である。

$$\therefore \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)_T$$

ただし、M と N は一般に状態量の関数である。

2022（R4）年度【1】略解

（1）	$H = U + PV$
（2）	$F = U - TS$
（3）	$G = H - TS$
（4）	$dU = TdS - PdV$
（5）	等温過程における系の F の減少は、 系が外部にする（最大）仕事に使われる
（6）	略
（7）	$dK = MdP + NdT$ が全微分になる条件 $\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)_T$

2022 年度（R4）【1】講評

熱力学の一般関係式に関する基本的な問いである。 熱力学的には、状態量であるための条件式が、数学的には、全微分になる条件である。 この理解が肝要となる。

2022 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：熱力学　[2 / 2]

（問題[1]と問題[2]は別々の答案用紙に解答すること.）

[2] 図 1 に示すように，圧縮機（状態 1→状態 2，断熱過程），加熱器（状態 2→状態 3，等圧過程），タービン（状態 3→状態 4，断熱過程）で構成されるサイクルを考える．圧縮機入口から理想気体（気体定数 R [J/(kg·K)]，比熱比κ）が流入する．圧力をP，温度をTとし，添え字は 1～4 における状態を表す．ただし，$P_1 = P_4$とする．圧縮機動力をW_c，タービンで得られる仕事をW_t，このサイクルで得られる正味の仕事をW $(= W_t - W_c)$ とするとき，以下の問いに答えなさい．ただし，運動エネルギー，位置エネルギーは無視する．

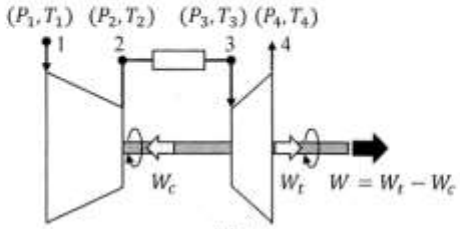


図 1

このサイクルの各過程が可逆過程である場合を考える．

(1) W_tをκ，R，T_3，圧力比γ $(= P_2/P_1)$ を用いて表しなさい．

(2) $\lambda = W_t/W_c$とするとき，λを温度を用いて表しなさい．

(3) このサイクルの理論熱効率η_{th}をκ，γを用いて表しなさい．

次に，圧縮機およびタービンの内部にて，不可逆過程が存在する場合を考える．ただし，圧力条件は可逆過程と同じとする．

(4) 可逆過程における T-s 線図を描きなさい．線図上に状態 1–4 を明示すること．さらに，不可逆過程における T-s 線図を，その上に重ねて描きなさい．ここで，s は比エントロピーである．

(5) 圧縮機における比エントロピー変化 (Δs) をn，κ，R，γを用いて表しなさい．ただし，この過程では，$Pv^n =$ 一定（nは定数，vは比体積）が成り立つものとする．

(6) 設問(5)の条件において，nとκの大小関係を，理由と共に示しなさい．

2022（R4）年度【２】問題〈定常流動系：ブレイトンサイクル〉

（１）W_t を κ, R, T_3, 圧力比 γ （$= P_2/P_1$）, $\boldsymbol{m}$ を用いて表しなさい。

W_t はタービン（状態３→４）で得られる仕事である。

熱力学の第１法則 $\Delta U = Q_{in} - W_{out}$ より、W_{out} を求める。

タービンでは断熱過程ゆえ、$Q_{in} = 0$

よって、$W_{out} = -\Delta U$

$$W_{out} = -\Delta U = -mc_v\Delta T$$

$$\therefore W_t = -\boldsymbol{m}c_v(T_4 - T_3)$$

ポアソンの法則 $PV^\kappa =$（一定）を用いて、T_4 を求める。

$$PV^\kappa = P\left(\frac{mRT}{P}\right)^\kappa = P^{1-\kappa}\cdot T^\kappa = \text{（一定）}$$

状態３と４で、

$$P_3{}^{1-\kappa}\cdot T_3{}^\kappa = P_4{}^{1-\kappa}\cdot T_4{}^\kappa$$

$$\therefore T_4{}^\kappa = \left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{1-\kappa} T_3{}^\kappa$$

$$\therefore T_4 = \left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} T_3$$

圧力比 γ の定義から、

$$\frac{P_3}{P_4} = \frac{P_2}{P_1} = \gamma$$

$$\therefore T_4 = \gamma^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}\cdot T_3$$

求めた T_4 を代入する。

$$\therefore W_t = -\boldsymbol{m}c_v\left(\gamma^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1\right)T_3$$

$$c_v = \frac{R}{\kappa - 1}$$

を代入する。

$$\therefore W_t = -\boldsymbol{m}\frac{R}{\kappa - 1}\left(\gamma^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1\right)T_3$$

これは、圧力仕事を求めているため誤答。**定常流動系のブレイトンサイクルゆえ、工業仕事を求めることに注意**

【以下、正しい解答】

W_t はタービン（状態３→４）で得られる**工業仕事**である。

定常流動系における熱力学の第１法則 $\Delta H = Q_{in} - W_t$ より、W_t を求める。

タービンでは断熱過程ゆえ、$Q_{in} = 0$

よって、$W_t = -\Delta H$

$$W_t = -\Delta H = -mc_p \Delta T$$

$$\therefore W_t = -\boldsymbol{m}c_p(T_4 - T_3)$$

ポアソンの法則より、

$$T_4 = \gamma^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \cdot T_3$$

よって、

$$\therefore W_t = \boldsymbol{m}c_p\left(1 - \gamma^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}\right)T_3$$

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1}R$$

を代入する。

$$\therefore W_t = \boldsymbol{m}\frac{\kappa}{\kappa - 1}R\left(1 - \gamma^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}\right)T_3$$

【別解】工業仕事の定義から直接求める。

$$W_t = -m\int_3^4 vdP$$

ここで、断熱変化ゆえ、

$$W = -m\int_{P_3}^{P_4} v_3\left(\frac{P_3}{P}\right)^{\frac{1}{\kappa}} dP = -mv_3{P_3}^{\frac{1}{\kappa}}\left[\frac{\kappa}{\kappa - 1}P^{-\frac{1}{\kappa}+1}\right]_{P_3}^{P_4}$$
$$= -m\frac{\kappa}{\kappa - 1}\left(v_3{P_3}^{\frac{1}{\kappa}}{P_4}^{-\frac{1}{\kappa}+1} - v_3P_3\right)$$

${P_3}{v_3}^{\kappa} = {P_4}{v_4}^{\kappa}$ であるから、${P_3}^{1/\kappa}v_3 = {P_4}^{1/\kappa}v_4$ を上式の第１項に代入し、$Pv = RT$ より、

$$W = -m\frac{\kappa}{\kappa - 1}(v_4P_4 - v_3P_3) = -\boldsymbol{m}c_p(T_4 - T_3)$$

これは、エンタルピー差に等しい。

（2）$\lambda = W_t/W_c$ とするとき、λ を温度を用いて表しなさい。

（1）を用いる、ここで、符号に気を付ける。W_c：圧縮機動力は正の値である。

$$W_c = \boldsymbol{m}c_p(T_2 - T_1)$$

ポアソンの法則より、

$$T_1 = \gamma^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \cdot T_2$$

よって、

$$W_C = \boldsymbol{m}c_p\left(1 - \gamma^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}\right)T_2 \quad \therefore \lambda = \frac{W_t}{W_c} = \frac{\left(1 - \gamma^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}\right)T_3}{\left(1 - \gamma^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}\right)T_2}$$

$$\therefore \lambda = \frac{T_3}{T_2}$$

（3）このサイクルの理論熱効率 η_{th} を κ, γ を用いて表しなさい。

$$\eta_{th} = \frac{Q_{in} - Q_{out}}{Q_{in}}$$

このサイクルでは、状態 2 → 3 で等圧加熱、状態 4 → 1 で等圧冷却している。

等圧過程において、気体の吸熱量 Q_{in} は、

$$Q_{in} = mc_p\Delta T$$

$$\therefore Q_{in} = Q_{23} = \boldsymbol{m}c_p(T_3 - T_2)$$

$Q_{out} = -Q_{in}$ より、

$$\therefore Q_{41} = -\boldsymbol{m}c_p(T_4 - T_1)$$

これらを代入する。

$$\therefore \eta_{th} = \frac{\boldsymbol{m}c_p(T_3 - T_2) + \boldsymbol{m}c_p(T_4 - T_1)}{\boldsymbol{m}c_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

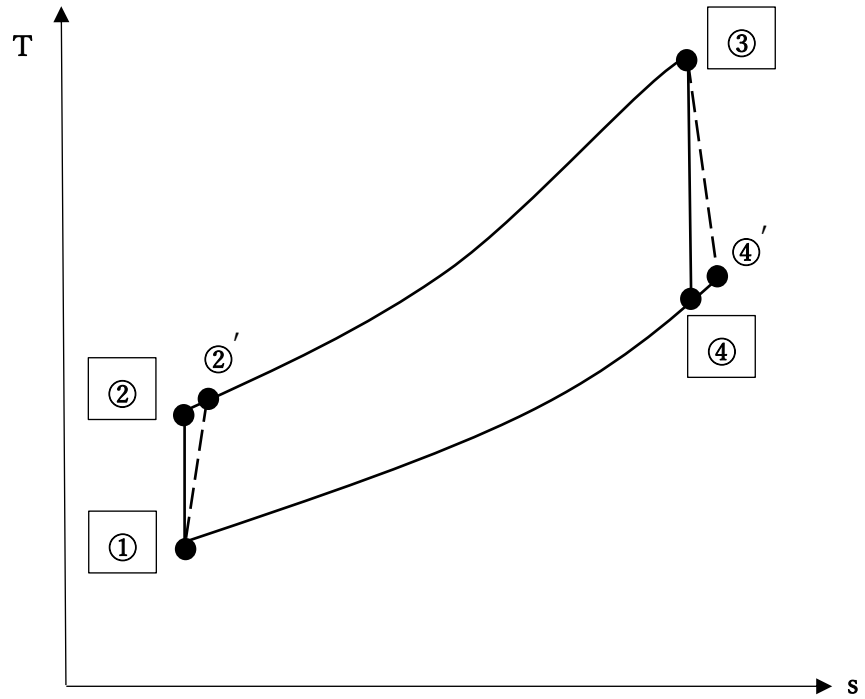
（1），（2）で求めた T_1, T_4 を代入して、

$$\therefore \eta_{th} = 1 - \frac{\gamma^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \cdot T_3 - \gamma^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \cdot T_2}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{\gamma^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}(T_3 - T_2)}{T_3 - T_2}$$

$$\therefore \eta_{th} = 1 - \gamma^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = 1 - \frac{1}{\gamma^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$$

次に、不可逆過程が存在する場合を考える。

（4）可逆過程における $T-s$ 線図を描きなさい。線図上に状態 1 ～ 4 を明示すること。
さらに、不可逆過程における $T-s$ 線図を、その上に重ねて描きなさい。
ここで、s は比エントロピーである。



（5）圧縮機における比エントロピー変化（Δs）を、$n,\ \kappa,\ R,\ \gamma$ を用いて表しなさい。
ただし、この過程では $Pv^n =$ 一定（n は定数、v は比体積）が成り立つものとする。

エントロピーは状態量であるため、不可逆過程の場合のエントロピー変化を求めるときに、可逆過程の場合のエントロピー変化を求めてもよい。

$$ds = \frac{dq}{T} \quad \therefore \Delta s = \int \frac{dq}{T}$$

熱熱力学の第 1 法則 $dh = dq + vdP$ から、$dq = dh - vdP$

$$\therefore \Delta s = \int \frac{dh - vdP}{T}$$

$$\Delta s = \int \frac{C_p dT - \frac{RT}{P} dP}{T} = C_p \int \frac{dT}{T} - R \int \frac{dP}{P} = C_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} - R \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P}$$

$$\therefore \Delta s = C_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{P_2}{P_1}$$

ここで、理想流体の状態方程式より、

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 v_2}{P_1 v_1}$$

$P_1 {v_1}^n = P_2 {v_2}^n$ であるから、$v_2/v_1 = (P_1/P_2)^{1/n} = \gamma^{1/n}$ を上式の第 1 項に代入すると、

$$\Delta s = C_p \ln\frac{P_2}{P_1}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{n}} - R\ln\frac{P_2}{P_1} = C_p \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} - R\ln\frac{P_2}{P_1}$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}C_p - R\right)\ln\gamma$$

ここで、定圧比熱は次式となる。

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1}R$$

よって、これを代入して、

$$\Delta s = \left(\frac{n-1}{n}\frac{\kappa}{\kappa-1}R - R\right)\ln\gamma = \left(\frac{(n-1)\kappa}{n(\kappa-1)} - 1\right)R\ln\gamma$$

$$\therefore \Delta s = \frac{n-\kappa}{n(\kappa-1)}R\ln\gamma$$

（６）設問（５）の条件において、n と κ の大小関係を、理由と共に示しなさい。

熱力学の第二法則より、不可逆過程ではエントロピーは増大する。（$\Delta s > 0$）

（５）で求めた結果を利用する。

$$\Delta s = \frac{n-\kappa}{n(\kappa-1)}R\ln\gamma > 0$$

これを解いて、

$$\therefore n > \kappa$$

2022（R4）年度【２】略解

（１）	$W_t = \boldsymbol{m}\dfrac{\kappa}{\kappa-1}R\left(1-\gamma^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}\right)T_3$
（２）	$\lambda = \dfrac{T_3}{T_2}$
（３）	$\eta_{th} = 1-\dfrac{1}{\gamma^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$
（４）	略
（５）	$\Delta s = \dfrac{n-\kappa}{n(\kappa-1)}R\ln\gamma$
（６）	$n > \kappa$ 熱力学の第二法則より、不可逆過程ではエントロピーは増大するから。

2022 年度（R4）【２】講評

ブレイトンサイクルに関する基本的な問いである。例のごとく、比熱比で比熱を表す必要がある。ポアソンの法則から、熱効率を圧縮比と比熱比で表すまでの流れには慣れておく。

また、ブレイトンサイクルは定常流動系ゆえ、仕事を問われたら工業仕事を求めること。