2023 年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程
機械工学専攻　入学試験問題

科目名：熱力学　［ 1 / 1 ］

（問題[1]と問題[2]は別々の答案用紙に解答すること．）

[1] 1 kg の理想気体の準静的過程に関する以下の設問に答えなさい．ただし，圧力[Pa]はP，比体積[m^3/kg]はv，気体定数[J/(kgK)]はR，温度[K]はT，比内部エネルギー[J/kg]はu，定積比熱[J/(kgK)]はc_v，定圧比熱[J/(kgK)]はc_pとする．

(1) 比エントロピーsの単位を答えなさい．
(2) 準静的微小変化においてds, du, dvの間に成り立つ関係を答えなさい．
(3) この気体への微小入熱量をδq[J/kg]とするとき，定積変化における温度変化量dT及び定圧変化における温度変化量dTを求めなさい．
(4) この気体の温度，体積がT_1, v_1からT_2, v_2に変化した際のエントロピーの変化量$s_2 - s_1$を求めなさい．
(5) 設問(4)の変化が等圧変化で$v_2 = ev_1$（eはネイピア数, 2.71828..）であった場合のエントロピー変化量と定圧比熱の関係を述べなさい．
(6) 等エントロピー変化においてdv/vとdT/Tの間に成り立つ関係を求めなさい．
(7) 比熱比$\kappa = c_p/c_v$を用いると断熱変化では$Pv^\kappa = \text{const.}$となることを示しなさい．

[2] 図 1 で示すように，圧力P_1，温度T_1，質量流量mで流入する空気を，圧力P_2に圧縮する圧縮機を考える．この過程において$Pv^n = \text{const.}$（nは定数，vは比体積）が成り立つとする．圧縮機動力をWとする．運動エネルギー，位置エネルギー，圧縮機からの放熱は無視するものとして，以下の問いに答えなさい．空気は理想気体として扱えるものとし，その気体定数をR，比熱比をκとする．

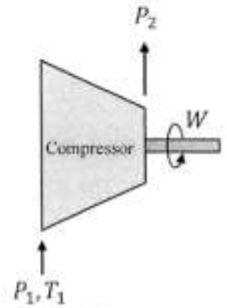


図 1

(1) 圧縮機入口，出口の比体積v_1, v_2を求めなさい．
(2) この変化の過程を変化の方向とともに$P-v$線図で示しなさい．さらに作動流体になされた正味の仕事を，線図上で図示しなさい．
(3) WをP_1, P_2, m, v_1, v_2, nを用いて求めなさい．
(4) 実際の圧縮機の過程は準静的過程ではない．その場合のnとκの大小関係を理由と共に示しなさい．
(5) 圧縮機入口，出口の比エントロピーをs_1, s_2とするとき，設問(4)で示した条件において，s_1とs_2の大小関係を理由と共に示しなさい．

2023（R5）年度【１】問題〈準静的過程〉

（１）比エントロピー s の単位を答えなさい。

・比エントロピー

$$s\ [\mathrm{J/(kg \cdot K)}]$$

（２）準静的微小変化において $ds, du\ dv$ の間に成り立つ関係を答えなさい。

エントロピー変化は次式である。

$$ds = \frac{\delta q}{T}$$

熱力学の第１法則 $du = \delta q - pdv$ から、

$$dq = du + Pdv$$

よって、

$$ds = \frac{du + Pdv}{T}$$

（３）この気体への微小入熱量を δq [J/kg] とするとき、
定積変化における温度変化量 dT
及び定圧変化における温度変化量 dT を求めなさい。

定積変化における入熱量は、定積比熱 c_v を用いて次式で表せる。

$$\delta q = c_v dT$$

よって、定積変化における温度変化量 dT は、

$$dT = \frac{\delta q}{c_v}$$

定圧変化における入熱量は、定圧比熱 c_p を用いて次式で表せる。

$$\delta q = c_p dT$$

よって、定圧変化における温度変化量 dT は、

$$dT = \frac{\delta q}{c_p}$$

（４）この気体の温度、体積が T_1, v_1 から T_2, v_2 に変化した際の
エントロピーの変化量 $s_2 - s_1$ を求めなさい。

エントロピー変化は次式である。

$$ds = \frac{dq}{T} \quad \therefore \Delta s = \int \frac{dq}{T}$$

熱力学の第１法則 $du = dq - Pdv$ から、

$$dq = du + Pdv$$

$$\therefore \Delta s = \int \frac{du + Pdv}{T}$$

理想気体では、$u = c_v T, \ \ Pv = RT$ ゆえ、

$$\Delta s = \int \frac{c_v dT}{T} + \int \frac{R dv}{v} = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1}$$

よって、**可逆**過程での膨張（状態１→２）における比エントロピー変化量 Δs_{12} は、

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1}$$

（５）設問（４）の変化が等圧変化で $v_2 = e v_1$（e はネイピア数 2.71828..）であった場合
のエントロピー変化量と定圧比熱の関係を述べなさい。

（４）の結果より、$v_2 = e v_1$ を代入すると、

$$s_2 - s_1 = c_v + R \quad \left(\because \frac{v_2}{v_1} = \frac{T_2}{T_1} \right)$$

マイヤーの関係 $c_p = c_v + R$ より、

$$s_2 - s_1 = c_v + R = c_p$$

（6）等エントロピー変化において dv/v と dT/T の間に成り立つ関係を求めなさい。

（4）より、エントロピー変化は次式である。

$$ds = \frac{c_v dT}{T} + \frac{R dv}{v}$$

等エントロピー変化ゆえ、$ds = 0$ なので、

$$\frac{c_v}{T} dT = -\frac{R}{v} dv$$

（7）比熱比 $\kappa = c_p/c_v$ を用いると断熱変化では $Pv^\kappa = const.$ となることを示しなさい。

断熱変化は等エントロピー変化ゆえ（6）の結果を用いる。

ポアソンの法則を導出する。

変数分離して、積分する。

$$\int \frac{c_v}{T} dT = \int -\frac{R}{v} dv$$

C を積分定数とすると、

$$c_v \ln T + R \ln v = C, \quad \ln T + \frac{R}{c_v} \ln v = C$$

$$\ln T + \ln v^{\frac{R}{c_v}} = C, \quad \ln T \cdot v^{\frac{R}{c_v}} = C$$

$$T \cdot v^{\frac{R}{c_v}} = e^C = const.$$

マイヤーの関係を用いて、

$$T \cdot v^{\frac{c_p - c_v}{c_v}} = const. \quad (\because c_p - c_v = R)$$

と書ける。

ここで、比熱比 κ の定義は、

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

よって、

$$T \cdot v^{\kappa - 1} = const.$$

ふたたび、状態方程式を用いる。

$$\frac{Pv}{R} \cdot v^{\kappa - 1} = const.$$

したがって、

$$P \cdot v^\kappa = const.$$ ■

2023（R5）年度【1】略解

（1）	s [J/(kg · K)]
（2）	$ds = \dfrac{du + Pdv}{T}$
（3）	（定積変化）$dT = \dfrac{\delta q}{c_v}$　　（定圧変化）$dT = \dfrac{\delta q}{c_p}$
（4）	$s_2 - s_1 = C_v \ln \dfrac{T_2}{T_1} + R \ln \dfrac{v_2}{v_1}$
（5）	$s_2 - s_1 = c_p$
（6）	$\dfrac{c_v}{T} dT = -\dfrac{R}{v} dv$
（7）	略

2023 年度（R5）【1】講評

エントロピーに関して、基本的な理解が問われた。

各過程における特徴、特に、可逆断熱過程に関してはしっかり理解しておきたい。

ポアソンの法則の証明も頻出ゆえ、慣れておきたい。

2023（R5）年度【２】問題〈定常流動系：圧縮機〉

（１）圧縮機入口、出口の比体積 v_1, v_2 を求めなさい。

理想気体の状態方程式より、

$$P_1 v_1 = RT_1$$

$$\therefore v_1 = \frac{RT_1}{P_1}$$

問題文の条件より、

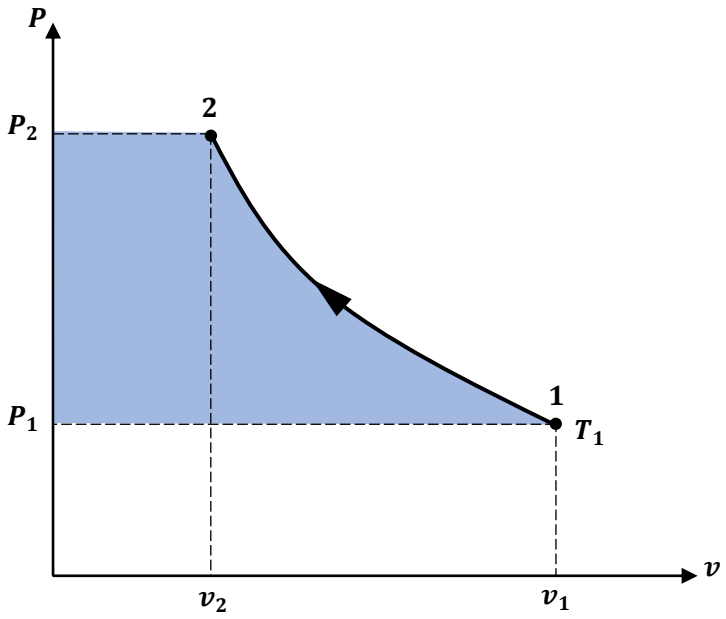
$$P \cdot v^n = const.$$

よって、

$$P_1 {v_1}^n = P_2 {v_2}^n$$

$$\therefore v_2 = v_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{RT_1}{P_1}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

（２）この変化の過程を変化の方向とともに $P-v$ 線図で示しなさい。
さらに作動流体になされた正味の仕事を、線図上で図示しなさい。



・工業仕事・・・開いた系が外部にする、工業的に利用可能な仕事。

（3）W を P_1, P_2, m, v_1, v_2, n を用いて求めなさい。

定常流動系ゆえ、工業仕事 W を求める。

工業仕事 W は次式で求められる。

$$W = m\int_1^2 vdP$$

ここで、問題文の条件より、

$$Pv^n = P_1{v_1}^n \quad \therefore v = v_1\left(\frac{P_1}{P}\right)^{\frac{1}{n}}$$

よって、

$$W = m\int_{P_1}^{P_2} v_1\left(\frac{P_1}{P}\right)^{\frac{1}{n}}dP = mv_1{P_1}^{\frac{1}{n}}\left[\frac{n}{n-1}P^{-\frac{1}{n}+1}\right]_{P_1}^{P_2}$$

したがって、

$$\begin{aligned} W &= m\frac{n}{n-1}v_1{P_1}^{\frac{1}{n}}\left({P_2}^{-\frac{1}{n}+1} - {P_1}^{-\frac{1}{n}+1}\right) \\ &= m\frac{n}{n-1}\left(v_1{P_1}^{\frac{1}{n}}{P_2}^{-\frac{1}{n}+1} - v_1P_1\right) \end{aligned}$$

また、${P_1}{v_1}^n = {P_2}{v_2}^n$ であるから、${P_1}^{1/n}v_1 = {P_2}^{1/n}v_2$ を上式の第 1 項に代入すると、

$$W = m\frac{n}{n-1}(v_2P_2 - v_1P_1)$$

【参考】$n = \kappa$（可逆断熱過程）の場合

$$W = m\frac{\kappa}{\kappa-1}(v_2P_2 - v_1P_1)$$

理想気体の状態方程式より、$Pv = RT$ を代入する。

$$W = m\frac{\kappa}{\kappa-1}(RT_2 - RT_1) = m\frac{\kappa}{\kappa-1}R(T_2 - T_1)$$

ここで、定圧比熱は次式となる。

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa-1}R$$

よって、

$$W = mc_p(T_2 - T_1)$$

これは、エンタルピー差に等しい。

（４）実際の圧縮機の過程は準静的過程ではない。
その場合の n と κ の大小関係を理由と共に示しなさい。

圧縮機における比エントロピー変化（Δs）を求める。

エントロピーは状態量であるため、不可逆過程の場合のエントロピー変化を求めるときに、可逆過程の場合のエントロピー変化を求めてもよい。

$$ds = \frac{dq}{T} \quad \therefore \Delta s = \int \frac{dq}{T}$$

熱力学の第 1 法則 $dh = dq + vdP$ から、$dq = dh - vdP$

$$\therefore \Delta s = \int \frac{dh - vdP}{T}$$

$$\Delta s = \int \frac{C_p dT - \frac{RT}{P} dP}{T} = C_p \int \frac{dT}{T} - R \int \frac{dP}{P} = C_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} - R \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P}$$

$$\therefore \Delta s = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1}$$

ここで、理想流体の状態方程式より、

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 v_2}{P_1 v_1}$$

また、$P_1 {v_1}^n = P_2 {v_2}^n$ であるから、$v_2/v_1 = (P_1/P_2)^{1/n}$ を上式の第 1 項に代入すると、

$$\Delta s = C_p \ln \frac{P_2}{P_1} \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{n}} - R \ln \frac{P_2}{P_1} = C_p \ln \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} - R \ln \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{n-1}{n} C_p - R\right) \ln \frac{P_2}{P_1}$$

ここで、定圧比熱は次式となる。

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R$$

よって、これを代入して、

$$\Delta s = \left(\frac{n-1}{n} \frac{\kappa}{\kappa - 1} R - R\right) \ln \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{(n-1)\kappa}{n(\kappa - 1)} - 1\right) R \ln \frac{P_2}{P_1}$$

$$\therefore \Delta s = \frac{n - \kappa}{n(\kappa - 1)} R \ln \frac{P_2}{P_1}$$

熱力学の第二法則より、不可逆過程ではエントロピーは増大する。（$\Delta s > 0$）

$$\Delta s = \frac{n - \kappa}{n(\kappa - 1)} R \ln \frac{P_2}{P_1} > 0 \quad \therefore n > \kappa$$

（５）圧縮機入口、出口の比エントロピーを s_1, s_2 とするとき、 設問（４）で示した条件において、s_1 と s_2 の大小関係を理由と共に示しなさい。
熱力学の第二法則より、不可逆過程ではエントロピーは増大する。（$\Delta s > 0$） $s_2 > s_1$

2023（R5）年度【２】略解

（１）	$v_1 = \frac{RT_1}{P_1}$ $v_2 = \frac{RT_1}{P_1}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{n}}$
（２）	略
（３）	$W = m\frac{n}{n-1}(v_2P_2 - v_1P_1)$
（４）	$n > \kappa$ 熱力学の第二法則より、不可逆過程ではエントロピーは増大するから。
（５）	$s_2 > s_1$ 熱力学の第二法則より、不可逆過程ではエントロピーは増大するから。

2023 年度（R5）【２】講評

定常流動系に関する基本的な問いである。絶対仕事と工業仕事を混同しないように。
例のごとく、比熱比で比熱を表す必要がある。
エントロピー増大則に関しては、しっかり理解する必要がある。