微分方程式

微分方程式

・常微分方程式・・・1変数関数の微分で構成される方程式

・偏微分方程式・・・多変数関数の微分で構成される方程式

この資料は、神戸大学工学部機械工学科の学生の大学院入試対策のために作成したものである。
常微分方程式を大きく10テーマに分類・構成して、常微分方程式の解法書としての機能を目標に鋭意作成中。

基本にはヨビノリ氏の講義を基に、ネット上で得られる大学の講義資料や有志のホームページを参考にしている。
将来的には、偏微分方程式も交えて、応用数学の学習の端緒となり得る資料にまで発展させたいと考えている。

(参考)神大機械工学専攻 H11 以降の出願傾向【常微分方程式】

	【常微分方程式】
R4(2022)	⑩◆連立微分方程式
R3(2021)	⑧二階線形非同次微分方程式
R2(2020)	⑤完全微分方程式
H31(2019)	⑩◆連立微分方程式
H30(2018)	③1階線形微分方程式
H29(2017)	⑧◆二階線形非同次微分方程式
H28	⑧◆二階線形非同次微分方程式
H27	⑩◆連立微分方程式
H26	⑦二階線形同次微分方程式
H25	②同次形
H24	⑧二階線形非同次微分方程式
H23	⑨n階線形微分方程式
H22	⑩◆連立微分方程式
H21	⑨n階線形微分方程式
H20	⑧二階線形非同次微分方程式
H19	③1階線形微分方程式
H18	③1階線形微分方程式
H17	⑦二階線形同次微分方程式
H16	⑧二階線形非同次微分方程式
H15	②同次形
H14	⑧二階線形非同次微分方程式
H13	⑩◆連立微分方程式
H12	⑧二階線形非同次微分方程式
H11	⑧二階線形非同次微分方程式

* 1階か2階かという区別よりも、特殊解を求める際に「定数変化法を用いるのか、未定係数法を用いるのか」という区別がとても重要であると思われる。(つまり、定数係数かどうかというところがポイント)
* 同次形や複雑な定数係数でない形の、変数変換を要する問題に関しては、誘導付きで出題されている。
* 基本的に、1階の場合は定数変化法、2階の場合は未定係数法で解くことが想定された出題であると思われる。
* 連立微分方程式に関しては、文字を消去して二階の線形微分方程式に帰着させて解く方法と、
  行列指数関数を用いる方法があるが、前者を⑧◆に、後者を⑩◆に分類している。
  (誘導のない場合は、文字消去優先)

① 変数分離形

$$y' = f(x)g(y)$$

〈解法〉

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$g(y) \neq 0$ のとき、

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

例題（1）

$$y' = 2xy,\quad y(0) = 1$$

$y = 0$ のとき、与式を満たす解となる。

$y \neq 0$ のとき、

$$\frac{1}{y}dy = 2x\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int 2x\,dx$$

$$\log|y| = x^2 + C$$

$$|y| = e^{x^2+C}$$

$$y = \pm e^C e^{x^2}$$

ここで、改めて定数 C' とおけば、求める一般解は、

$$y = C'e^{x^2}$$

$y(0) = 1$ より、

$$C' = 1$$

よって、求める特殊解は、

$$y = e^{x^2}$$

例題（2）

$$y' = 1 - y^2$$

$y = \pm 1$ のとき、与式を満たす解となる。

$y \neq \pm 1$ のとき、

$$\frac{1}{(1-y)(1+y)}dy = 1\,dx$$

$$\int \frac{1}{(1-y)(1+y)}dy = \int dx$$

$$\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{1+y}\right)dy = \int dx$$

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = x + C$$

$$\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = e^{2x+2C}$$

$$\frac{1+y}{1-y} = \pm e^{2C}e^{2x}$$

ここで、改めて定数 C' とおけば、求める一般解は、

$$y = \frac{C'e^{2x} - 1}{C'e^{2x} + 1}$$

② 同次形

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

〈解法〉

$$u = \frac{y}{x} \text{ とおくと、}$$

$$y = ux \quad \text{であるので} \quad y' = u'x + u$$

これを与式に代入して、

$$u'x + u = f(u)$$

$$u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}(f(u) - u) \text{〈変数分離形〉}$$

$f(u) \neq u$ のとき、

$$\frac{1}{f(u) - u}du = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{f(u) - u}du = \int \frac{1}{x}dx$$

ここでの「同次」という言葉の取り扱いに注意。

いわゆる「斉次＝同次」の「同次」ではない。

例題（1）

$$y' = \frac{y^2}{x^2 + xy}$$

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$u = \frac{y}{x} \text{ とおくと、}$$

$$y = ux \quad \text{であるので} \quad y' = u'x + u$$

これを与式に代入して、

$$u'x + u = \frac{u^2}{1+u}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{1+u}\frac{1}{x}$$

$u = 0$ のとき、上式を満たす解となる。

$u \neq 0$ のとき、

$$\frac{1+u}{u}du = -\frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1+u}{u}du = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\int \left(\frac{1}{u} + 1\right)du = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$u + \log|u| = -\log|x| + C$$

$$\log|ux| = -u + C$$

$$|ux| = e^{-u+C}$$

$$ux = \pm e^C e^{-u}$$

$$u = \frac{y}{x} \text{ を戻す}$$

$$\frac{y}{x}x = \pm e^C e^{-\frac{y}{x}}$$

$$y = \pm e^C e^{-\frac{y}{x}}$$

ここで、改めて定数 C' とおけば、求める一般解は、

$$y = C' e^{-\frac{y}{x}}$$

例題（2）

$$y' = \frac{y}{x} + \cos^2\frac{y}{x},\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$u = \frac{y}{x} \text{ とおくと、}$$

$$y = ux \quad \text{であるので} \quad y' = u'x + u$$

これを与式に代入して、

$$u'x + u = u + \cos^2 u$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\cos^2 u$$

$\cos u \neq 0$ のとき、

$$\frac{1}{\cos^2 u}du = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 u}du = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\tan u = \log|x| + C$$

$$u = \frac{y}{x} \text{ を戻す}$$

$$\tan\frac{y}{x} = \log|x| + C$$

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ より、

$$\tan\frac{\pi}{4} = \log|1| + C$$

$$C = 1$$

よって、求める特殊解は、

$$\tan\frac{y}{x} = \log|x| + 1$$

③ 1階線形微分方程式

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$q(x) = 0 \rightarrow$ 斉次(同次)方程式(変数分離形)

$q(x) \neq 0 \rightarrow$ 非斉次(同次)方程式

〈解法①〉 特殊解 が分かっている場合

$$y' + p(x)y = q(x)$$

特殊解 $y = \alpha(x)$ を与式に代入する。

$$\alpha' + p(x)\alpha = q(x)$$

上2式の両辺を引き算すると、

$$(y - \alpha)' + p(x)(y - \alpha) = 0$$

$Y = y - \alpha$ とおくと、

$$Y' + p(x)Y = 0 \text{〈斉次方程式〉}$$

これを解くと、

$$Y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

よって、

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + \alpha(x)$$

このように、非斉次方程式の一般解は、斉次方程式の一般解と非斉次方程式の特殊解の和である。

例題(1)

$$y' + 2xy = 2x, \quad \alpha(x) = 1$$

$y' + 2xy = 0$ を解くと、

$$y = Ce^{-\int 2x\,dx} = Ce^{-x^2}$$

よって、非斉次方程式の一般解は、

$$y = Ce^{-x^2} + 1$$

〈解法②〉 定数変化法

・Step１　斉次方程式を解く。

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

・Step２　定数 C を関数 $C(x)$ に変化させ、非斉次方程式に代入する。

$$\left(C(x)e^{-\int p(x)dx}\right)' + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$
$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx$$

よって、特殊解は、

$$y = \left\{\int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx\right\}e^{-\int p(x)dx}$$

・Step３ したがって、非斉次方程式の一般解は、斉次方程式の一般解と非斉次方程式の特殊解の和であるので、

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + \left\{\int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx\right\}e^{-\int p(x)dx}$$

例題（1）

$$y' - (2x+1)y = 2xe^{x}$$

$y' - (2x+1)y = 0$ を解くと、

$$y = Ce^{x^2+x}$$

ここで、定数 C を関数 $C(x)$ に変化させ、非斉次方程式に代入する。

$$C'(x)e^{x^2+x} + (2x+1)Ce^{x^2+x} - (2x+1)Ce^{x^2+x} = 2xe^{x}$$
$$C'(x)e^{x^2+x} = 2xe^{x}$$

$$C'(x) = 2xe^{-x^2}$$

$$C(x) = \int 2xe^{-x^2}\,dx = -e^{-x^2}$$

よって、特殊解の1つは、

$$y = -e^{-x^2}e^{x^2+x} = -e^{x}$$

したがって、非斉次方程式の一般解は、

$$y = Ce^{x^2+x} - e^{x}$$

〈解法③〉 積分因子

$$y' + p(x)y = q(x)$$

の両辺に、積分因子 $e^{\int p(x)dx}$ をかけて、

$$e^{\int p(x)dx}y' + e^{\int p(x)dx}p(x)y = e^{\int p(x)dx}q(x)$$

$$\left\{e^{\int p(x)dx}y\right\}' = e^{\int p(x)dx}q(x)$$

$$e^{\int p(x)dx}y = \int q(x)\, e^{\int p(x)dx}dx + C$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left\{\int q(x)e^{\int p(x)dx}\, dx + C\right\}$$

例題（1）

$$y' + \frac{2}{x}y = x$$

両辺に、$e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{\log x^2} = x^2$ をかけて、

$$x^2y' + 2xy = x^3$$

$$(x^2y)' = x^3$$

$$x^2y = \int x^3\, dx = \frac{1}{4}x^4 + C$$

したがって、非斉次方程式の一般解は、

$$y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{C}{x^2}$$

④ ベルヌーイの微分方程式（1階非線形微分方程式）

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \neq 0, 1)$$

〈解法〉

$y^{\alpha} \neq 0$ のとき、両辺を y^{α} でわって、

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$$

$u = y^{1-\alpha}$ とおくと、

$$u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$$

となるので、

$$\frac{1}{1-\alpha}u' + p(x)u = q(x)$$

$$u' + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x)$$ 〈線形微分方程式〉

例題（1）

$$y' + y = e^x y^2$$

$y = 0$ は与式を満たす解である。

$y \neq 0$ のとき、両辺を y^2 でわって、

$$y^{-2}y' + y^{-1} = e^x$$

$u = y^{-1}$ とおくと、

$$u' = -y^{-2}y'$$

となるので、

$$-u' + u = e^x$$

$$u' - u = -e^x$$ 〈線形微分方程式〉

$u' - u = 0$ を解くと、

$$u = Ce^x$$

ここで、定数 C を関数 $C(x)$ に変化させ、非斉次方程式に代入する。

$$C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = -e^x$$

$$C'(x)e^x = -e^x$$

$$C'(x) = -1$$

$$C(x) = \int (-1)\,dx = -x$$

よって、特殊解は、

$$u = -xe^x$$

したがって、非斉次方程式の一般解は、

$$u = Ce^x - xe^x = e^x(C - x)$$

よって、

$$y = \frac{1}{e^x(C - x)}$$

例題（2）

$$w' = aw^{\frac{2}{3}} - bw, \quad w(0) = 0$$

$$w' + bw = aw^{\frac{2}{3}}$$

$w \neq 0$ のとき、両辺を $w^{\frac{2}{3}}$ でわって、

$$w^{-\frac{2}{3}}w' + bw^{\frac{1}{3}} = a$$

$u = w^{\frac{1}{3}}$ とおくと、

$$u' = \frac{1}{3}w^{-\frac{2}{3}}w'$$

となるので、

$$u' + \frac{b}{3}u = \frac{a}{3} \quad \text{〈線形微分方程式〉}$$

$$u' + \frac{b}{3}u = 0 \text{ を解くと、}$$

$$u = Ce^{-\frac{b}{3}t}$$

上の線形微分方程式は、

$$u = \frac{a}{b}$$

を特殊解にもつので、非斉次方程式の一般解は、

$$u = Ce^{-\frac{b}{3}t} + \frac{a}{b}$$

よって、

$$w = \left(Ce^{-\frac{b}{3}t} + \frac{a}{b}\right)^3$$

ここで、$w(0) = 0$ より、

$$C = -\frac{a}{b}$$

したがって、

$$w = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \left(1 - e^{-\frac{b}{3}t}\right)^3$$

⑤ 完全微分方程式

$$F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy = 0$$

〈解法〉

$$dF = F_x dx + F_y dy = 0$$

より、一般解は、

$$F(x,y) = C$$

〈動機〉

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

上式が「変数分離形」や「斉次形」でなかったら、

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

これが完全形であれば解ける！

〈定理〉

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

が完全形であるための必要十分条件は、

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y)$$

〈$F(x,y)$ の具体的な探し方〉

$F_x(x,y) = P(x,y)$ より、

$$F(x,y) = \int P(x,y) + G(y)$$

これを $F_y(x,y) = Q(x,y)$ に代入して、

$$\frac{dG}{dy}(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx$$

$$G(y) = \int \left\{ Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx \right\} dy$$

上式の形より、$Q(x,y)$ のうち x を含む項は $\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx$ から現れる項と相殺する。

よって、

$$G(y) = \text{"} \int Q(x,y)dy \text{ のうち } y \text{ のみを含む項 "}$$

したがって、

$$F(x,y) = \int P(x,y) + \text{"} \int Q(x,y)dy \text{ のうち } y \text{ のみを含む項 "}$$

例題（1）

$$(2x-y)dx+(3y^2-x)dy=0$$

$P(x,y)=2x-y,\quad Q(x,y)=3y^2-x$ より、

$$P_y(x,y)=-1,\quad Q_x(x,y)=-1$$

よって、$P_y(x,y)=Q_x(x,y)$ であり、与式は完全形。

$$F(x,y)=\int P(x,y)+\text{"}\int Q(x,y)dy\,\text{のうち}\,y\,\text{のみを含む項"}$$

より、

$$F(x,y)=x^2-xy+y^3$$

よって、完全微分方程式の一般解は、

$$x^2-xy+y^3=C$$

例題（2）：ポアソンの法則（$VT^{\frac{3}{2}}=Const.$）の証明

熱力学第一法則より、単原子分子理想気体の場合、断熱条件下で次式が成り立つ。

$$\frac{3}{2}nRdT=-pdV$$

$$\frac{nRT}{V}dV+\frac{3}{2}nRdT=0$$

$$\frac{1}{V}dV+\frac{3}{2T}dT=0$$

$P_T(T,V)=Q_V(T,V)=0$ より、与式は完全形なので、

$$F(x,y)=\int P(x,y)+\text{"}\int Q(x,y)dy\,\text{のうち}\,y\,\text{のみを含む項"}$$

より、

$$F(T,V)=\log V+\frac{3}{2}\log T$$

$$=\log VT^{\frac{3}{2}}$$

よって、完全微分方程式の一般解は、

$$\log VT^{\frac{3}{2}}=C$$

したがって、

$$VT^{\frac{3}{2}}=Const.$$

⑥ クレローの微分方程式

$$y = xy' + f(y')$$

〈解法〉

$y' = p$ とおくと、

$$y = xp + f(p)$$

両辺を x で微分すると、

$$y' = p + xp' + f'(p)p'$$
$$\left(x + f'(p)\right)p' = 0$$

よって、

$$p' = 0 \quad \text{または} \quad x + f'(p) = 0$$

(i) $p' = 0$ のとき、$p = C$ を代入すると、一般解は、

$$y = Cx + f(C)$$

(ii) $x + f'(p) = 0$ のとき

$$\begin{cases} y = xp + f(p) \\ x + f'(p) = 0 \end{cases}$$

より、

$$(x, y) = \left(-f'(p), -pf'(p) + f(p)\right)$$

※　これを「特異解」という。「特異解」とは、一般解の任意定数にどのような値を代入しても得られない解のこと。

例題（1）

$$y = xy' + (y')^2$$

$y' = p$ とおくと、

$$y = xp + p^2$$

両辺を x で微分すると、

$$y' = p + xp' + 2pp'$$

$$(x + 2p)p' = 0$$

よって、

$$p' = 0 \quad \text{または} \quad x + 2p = 0$$

(i) $p' = 0$ のとき、$p = C$ を代入すると、一般解は、

$$y = Cx + C^2$$

(ii) $x + 2p = 0$ のとき

$$\begin{cases} y = xp + p^2 \\ x + 2p = 0 \end{cases}$$

より、

$$(x, y) = (-2p, -p^2)$$

$p = -\frac{1}{2}x$ より、特異解は、

$$y = -\frac{1}{4}x^2$$

以上、(i),(ii)より

$$y = Cx + C^2 \quad \text{（一般解）}$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 \quad \text{（特異解）}$$

例題（2）

$$y = xp + \cos p \quad (p = y')$$

両辺を x で微分すると、

$$y' = p + xp' - p' \sin p$$
$$(x - \sin p)p' = 0$$

よって、

$$p' = 0 \quad \text{または} \quad x - \sin p = 0$$

(i) $p' = 0$ のとき、$p = C$ を代入すると、一般解は、

$$y = Cx + \cos C$$

(ii) $x - \sin p = 0$ のとき

$$\begin{cases} y = xp + \cos p \\ x - \sin p = 0 \end{cases}$$

より、特異解は、

$$(x, y) = (\sin p\,, p \sin p + \cos p)$$

以上、(i),(ii)より

$$y = Cx + \cos C \quad \text{（一般解）}$$
$$(x, y) = (\sin p\,, p \sin p + \cos p) \quad \text{（特異解）}$$

⑦ 二階線形同次微分方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

「重ね合わせの原理」

y_1, y_2 が方程式の解ならば、その線形結合

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

も方程式の解である。

【証明】

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ を方程式の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned}&(C_1 y_1'' + C_2 y_2'') + p(x)(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2)\\&= C_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + C_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)\\&= 0\end{aligned}$$

【定理】

方程式の2つの基本解 y_1, y_2 が一次独立であるとき、その線形結合

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

が方程式の一般解である。（なお、特異解は持たない）

〈解法〉同次定係数

$$y'' + ay' + by = 0$$

$y = e^{\lambda x}$ を方程式に代入すると、

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \text{（特性方程式）}$$

(i) 相異なる2つの実数解 $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2}$

$$e^{\lambda_1 x},\quad e^{\lambda_2 x} \quad \text{（基本解）}$$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad \text{（一般解）}$$

(ii) 重解 $\boldsymbol{\lambda_1 (= -a/2)}$

$y = C_1(x) e^{\lambda_1 x}$ を方程式の左辺に代入すると、（定数変化法）

$$C_1''(x) + 2C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + a(C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1') + bC_1(x)y_1$$
$$= C_1(x)(y_1'' + ay_1' + by_1) + C_1'(x)(2y_1' + ay_1) + C_1''(x)y_1$$

よって、$C_1''(x) = 0$ となればよく、$C_1(x) = x$ はこれを満たす。

以上より、

$$e^{\lambda_1 x},\quad xe^{\lambda_1 x} \quad \text{（基本解）}$$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} \quad \text{（一般解）}$$

(iii) 2つの共役複素数解 $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2}$

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta,\quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$z_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$
$$z_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

重ね合わせの原理より、

$$\frac{1}{2}(z_1 + z_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\frac{1}{2i}(z_1 - z_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

も方程式の解であり、これらは一次独立になっているので、

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad e^{\alpha x}\sin\beta x \quad \text{（基本解）}$$

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x \quad \text{（一般解）}$$

例題（1）

$$y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \text{（特性方程式）}$$
$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$
$$\therefore \lambda = 2, 3$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \quad \text{（一般解）}$$
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 + 3C_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

$$y = -e^{2x} + e^{3x} \quad \text{（特殊解）}$$

例題（2）

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \text{（特性方程式）}$$
$$(\lambda - 1)^2 = 0$$
$$\therefore \lambda = 1 \text{（重解）}$$

$$y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} \quad \text{（一般解）}$$

例題（3）減衰振動

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

$$x'' + \frac{b}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x'' + 2\gamma x' + {\omega_0}^2 x = 0 \quad \left(\gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

$$\lambda^2 - 2\gamma\lambda + {\omega_0}^2 = 0 \quad \text{（特性方程式）}$$

$\gamma < \omega_0$ の場合について考える。

$$\begin{aligned} \lambda &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - {\omega_0}^2} \\ &= -\gamma \pm i\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2} \\ &= -\gamma \pm i\omega \end{aligned}$$

$$\therefore x(t) = C_1 e^{-\gamma t}\cos\omega t + C_2 e^{-\gamma t}\sin\omega t \quad \text{（一般解）}$$

⑧ 二階線形非同次微分方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

〈解法〉非同次定係数

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

〈解法①〉 特殊解 $\alpha(x)$ が分かっている場合

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

特殊解 $y = \alpha(x)$ を与式に代入する。

$$\alpha'' + a\alpha' + b\alpha = f(x)$$

上2式の両辺を引き算すると、

$$(y-\alpha)'' + a(y-\alpha)' + b(y-\alpha) = 0$$

$Y = y - \alpha$ とおくと、

$$Y'' + aY' + bY = 0 \quad \text{（同次方程式）}$$

これを解くと、

$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2$$

$$\therefore y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + \alpha$$

このように、非同次方程式の一般解は、同次方程式の一般解と非同次方程式の特殊解の和である。

例題（1）

$$y'' + y' - 6y = 2x^2$$

$$y'' + y' - 6y = 0 \text{ を解く}$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \quad \text{（特性方程式）}$$

$$(\lambda+3)(\lambda-2) = 0$$

$$\therefore \lambda = 2, -3$$

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} \quad \text{（同次方程式の一般解）}$$

方程式に $\alpha(x) = Ax^2 + Bx + C$ を代入すると、（単なる予想）

$$2A + (2Ax + B) - 6(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2$$

$$-6Ax^2 + (2A - 6B)x + (2A + B - 6C) = 2x^2$$

$$\begin{cases} -6A = 2 \\ 2A - 6 = 0 \\ 2A + B - 6C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{3} \\ B = -\dfrac{1}{9} \\ C = -\dfrac{7}{54} \end{cases}$$

以上より、非同次方程式の一般解は、

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x - \frac{7}{54}$$

〈解法②〉 定数変化法 特殊解を一般的に求める

・Step１ 同次方程式を解く。

$$y'' + ay' + by = 0$$
$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

・Step２ 定数 C_1, C_2 を関数 $C_1(x), C_2(x)$ にし、ある条件を課して、非同次方程式に代入する。

$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ の形で、かつ ${C_1}'(x)y_1 + {C_2}'(x)y_2 = 0$ を満たすようなもので非同次方程式の解になる $C_1(x), C_2(x)$ を探す。

$$y' = {C_1}'(x)y_1 + C_1(x){y_1}' + {C_2}'(x)y_2 + C_2(x){y_2}' = C_1(x){y_1}' + C_2(x){y_2}'$$
$$y'' = {C_1}'(x){y_1}' + C_1(x){y_1}'' + {C_2}'(x){y_2}' + C_2(x){y_2}''$$

であるから、

$$\begin{aligned}
&y'' + ay' + by \\
&= {C_1}'(x){y_1}' + C_1(x){y_1}'' + {C_2}'(x){y_2}' + C_2(x){y_2}'' + a(C_1(x){y_1}' + C_2(x){y_2}') + b(C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2) \\
&= C_1(x)({y_1}'' + a{y_1}' + by_1) + C_2(x)({y_2}'' + a{y_2}' + by_2) + {C_1}'(x){y_1}' + {C_2}'(x){y_2}'
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{cases} {C_1}'(x)y_1 + {C_2}'(x)y_2 = 0 \\ {C_1}'(x){y_1}' + {C_2}'(x){y_2}' = f(x) \end{cases}$$

を満たす $C_1(x), C_2(x)$ を考えればよい。

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ {y_1}' & {y_2}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {C_1}'(x) \\ {C_2}'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

ロンスキアン（ロンスキー行列） $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ {y_1}' & {y_2}' \end{vmatrix}$ とおくと、

x の値によらず $W(y_1, y_2) \neq 0$ であり、$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ {y_1}' & {y_2}' \end{pmatrix}$ は逆行列をもつ。

したがって、

$$\begin{pmatrix} {C_1}'(x) \\ {C_2}'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(y_1, y_2)}\begin{pmatrix} {y_2}' & -y_2 \\ -{y_1}' & y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$\therefore {C_1}'(x) = -\frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} \quad \therefore {C_2}'(x) = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)}$$

よって、

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx, \quad C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

以上より、特殊解は、

$$\alpha(x) = -y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

例題（1）

$$y'' + y' - 6y = 2x^2$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-3x} \\ 2e^{2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -5e^{-x} (\neq 0)$$

$$\alpha(x) = -e^{2x} \int \frac{2x^2 e^{-3x}}{-5e^{-x}} dx + e^{-3x} \int \frac{2x^2 e^{2x}}{-5e^{-x}} dx$$

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{2}{5} e^{2x} \int x^2 e^{-2x} dx - \frac{2}{5} e^{-3x} \int x^2 e^{3x} dx \\ &= -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} e^{2x} \cdot e^{-2x} (2x^2 + 2x + 1) - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{27} e^{3x} \cdot e^{-3x} (9x^2 - 6x + 1) \\ &= -\frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{9} x - \frac{7}{54} \end{aligned}$$

また、非同次定数係数線形微分方程式に関して、代表的な4つの解法を掲載しておきます。
ここで、未定係数法と定数変化法の使い分けに関しては、定数係数かどうかというところがポイントになってきます。

方法	長所	短所
未定係数法	・考え方が単純 ・計算も単純	・解の予測が必要 （右辺が複雑だと使えない）
定数変化法	・定数係数以外でも使える （線形微分方程式ならOK）	・階数が上がるほど 計算が大変 ※
微分演算子法	・慣れればかなり早く解ける ・特定の形だと瞬殺 （右辺が e^{at} の場合）	・演算子の理解が必要 （公式が独特）
ラプラス変換	・微分積分計算が不要 ・計算量も少なめ ・いきなり初期条件を 考慮して計算できる	・ラプラス変換の理解が必須 ・公式の暗記が必須 ・部分分数分解が必要 （右辺が多項式だとなおさら）

★特解の構成法（未定係数法）

非斉次方程式は、その非斉次方程式の特解さえ構成できれば、斉次方程式の一般解を求める問題に帰着する。
しかし、上で示した**解法②の定数変化法は、かなり複雑で使いづらい。**

一方、線形微分方程式が**定数係数で比較的簡単な場合には、この公式を使わずとも特解を求められる場合が多い。**
その方法である**「未定係数法」**を紹介する。

どの場合についても、非斉次方程式の右辺 $f(x)$ の関数形に応じて、特殊解 $y=\alpha(x)$ の関数形を予想し、
その係数をうまく調節することで特解を求める。以下に代表例を示してある。

ただし、未定係数法がうまくいくのは、特解の形を正しく仮定できたときだけである。
間違った関数形を仮定してしまった場合には、係数をどう選んでも両辺が(恒等的には）等しくならないため注意する。

❶ 右辺が指数関数のとき（$f(x)\propto e^{ax}$）

特殊解 $y=Ke^{ax}$ と仮定して、方程式に代入

❷ 右辺がべき関数のとき（$f(x)\propto x^n$）

特殊解 $y=K_0+K_1x+\cdots+K_nx^n$ と仮定して、方程式に代入

❸ 右辺が指数関数のとき（$f(x)\propto \cos kx$, $\sin kx$）

特殊解 $y=K_1\cos kx+K_2\sin kx$ と仮定して、方程式に代入

❹ 右辺が指数関数と三角関数の積のとき（$f(x)\propto e^{ax}\cos kx$, $e^{ax}\sin kx$）

特殊解 $y=Ke^{ax}(\cos kx+\sin kx)$ と仮定して、方程式に代入

❺ 右辺が上記❶～❹の和となっているとき（一例：$f(x)=e^{ax}+bx^2$）

（一例）特殊解 $y=Ke^{ax}+K_0+K_1x+K_2x^2$ と仮定して、方程式に代入

★未定係数法の注意点

非斉次方程式によっては、上記の計算法で仮定する特殊解が、斉次方程式の基本解と一致してしまう場合がある。
この場合には、上記の方法で用意する特解の候補に x をかけたものを代わりに使う。
例）$f(x)=e^x$ である場合、e^x が斉次方程式の基本解の一つと一致してしまう。

こういった場合、特殊解 $y=Kxe^x$ と仮定して、方程式に代入

さらに例外的な場合として、斉次方程式の特性方程式が重解を持ち、その重解に対応する斉次方程式の基本解と $f(x)$ が一致してしまう場合もある。この場合には、上述の特解の候補に x^2 をかけたものを代わりに使うとうまくいく。
例）$y''+2y'+1=e^x$ の一般解を求めるとする。
この式に対応する斉次方程式は $y''+2y'+1=0$ で、その特性方程式を解くと、

$$\lambda^2-2\lambda+1=0 \quad （特性方程式）$$

$$(\lambda-1)^2=0 \quad \therefore \lambda=1 \,（重解）$$

したがって、この場合の斉次方程式の一般解は

$$y=C_1e^x+C_2xe^x \quad （一般解）$$

こういった場合、特殊解 $y=Kx^2e^x$ と仮定して、方程式に代入

なお、未定係数法の具体的な例題に関しては、下の『二階非斉次微分方程式の解法』を参照してください。

⑨ n 階線形微分方程式（高階線形微分方程式）

例題（1）

$$y''' - 3y' + 2y = e^{2x}$$

$$y''' - 3y'' + 2y = 0 \text{ を解く}$$

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \text{（特性方程式）}$$

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0$$

$$\therefore \lambda = 1 \text{（重解）}, -2$$

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{-2x} \quad \text{（同次方程式の一般解）}$$

方程式に $\alpha(x) = Ae^{2x}$ を代入すると、（未定係数法による予想）

$$(8 - 6 + 2)Ae^{2x} = e^{2x}$$

$$\therefore A = \frac{1}{4}, \quad \therefore \alpha(x) = \frac{1}{4}e^{2x}$$

以上より、非同次方程式の一般解は、

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x}$$

例題（2）：H21出題

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 8\frac{d^2y}{dx^2} + 16 = \sin x$$

$$y^{(4)} + 8y^{(2)} + 16 = 0 \text{ を解く}$$

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0 \quad \text{（特性方程式）}$$

$$(\lambda + 2i)^2(\lambda - 2i)^2 = 0$$

$$\therefore \lambda = \pm 2i \text{（重解）}$$

ここで、基本解は、

$$\cos 2x,\ x\cos 2x,\ \sin 2x,\ x\sin 2x \text{（基本解）}$$

よって、

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 x \cos 2x + C_3 \sin 2x + C_4 x \sin 2x \quad \text{（同次方程式の一般解）}$$

方程式に $\alpha(x) = A\cos x + B\sin x$ を代入すると、（未定係数法による予想）

$$9A\cos x + 9B\sin x = \sin x$$

$$\therefore A = \frac{1}{9}, B = 0 \quad \therefore \alpha(x) = \frac{1}{9}\sin x$$

以上より、非同次方程式の一般解は、

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\sin 2x + \frac{1}{9}\sin x$$

⑩◆連立微分方程式（行列指数関数を用いた解法）

・同次方程式の場合

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

同次方程式の初期値 $\boldsymbol{y}_*(0)$ が与えられている場合、この微分方程式の解は次式となる。

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{y}_*(0)$$

初期値が与えられてない場合、この微分方程式の解は次式となる。

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{c}$$

ここで、C_1, C_2 を任意定数として、

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

である。

つまり、行列指数関数 $e^{\boldsymbol{A}x}$ を求めることが重要になる。

〈行列指数関数の求め方〉

① 対角化・ジョルダン標準形による方法
② ラプラス変換による方法
③ ケーリー・ハミルトンの定理による方法
④ 有限級数で表す方法

微分方程式　まとめ 2　（金曜２限，萬代担当）

1　２階線形微分方程式

- **２階線形**微分方程式とは,

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x) \tag{1.1}$$

の形の微分方程式である．未知関数とその導関数 y, y', y'' に関して，１次式であることが重要である．左辺を $L[y]$ と書くと,

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2], \qquad L[ky] = kL[y] \quad (k\text{ は定数}) \tag{1.2}$$

なる**線形性**を持っている．

- 係数 $f(x)$, $g(x)$ が定数のとき，**定数係数**と呼ぶ．また，$r(x) \equiv 0$ のとき，**同次**と呼ぶ．すなわち，(1.1) に対応した同次方程式は

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 \tag{1.3}$$

- **同次の場合**，(1.3) の一般解は，$y = C_1F(x) + C_2G(x)$ の形をしていて，これですべての解が表わされている*)．このとき，$\{F(x), G(x)\}$ を (1.1) の**基本解系**と呼ぶ．本来は，**解の基本形**と呼ぶべきだが，基本解系という言葉が定着している．**解空間の基底**ということもある．

　（実は，$F(x) = CG(x)$ や $G(x) = CF(x)$ とはなっていないような２つの解 $F(x)$, $G(x)$ を見つければ，これが自動的に基本解系を作る，ということが分かっている.）

非同次の場合，(1.1) の解は，ひとつの特殊解 $A(x)$ さえ見つかれば，$y = A(x) + C_1F(x) + C_2G(x)$ が一般解（すべての解）となる．ここで，第2,3項の $C_1F(x) + C_2G(x)$ は，対応する同次方程式 (1.3) の一般解である．

　一般には，$F(x)$, $G(x)$, $A(x)$ を見つけるのは難しいが，**定数係数**の場合には，分かっている．特に，基本解系 $\{\,F(x), G(x)\,\}$ は容易に分かる．

- ２階の場合の**初期値問題**は，$y(x_0) = A$, $y'(x_0) = B$ と，２つ条件を与える．線形微分方程式の場合は，必ずこの条件で解が１つに決まる．

---

*) 決して当たり前のことではなく，緻密な議論がいる．

2　２階定数係数線形微分方程式

- **定数係数同次方程式**

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{2.1}$$

に対して，２次方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ を**特性方程式**という．$y = e^{\lambda x}$ が解であるとしたとき[†]に定数 λ が満たすべき条件である．この２次方程式の解で，次のように (2.1) の基本解系がわかる．

特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の解	同次方程式 (2.1) の基本解系
．相異なる２実数解 λ_1, λ_2 をもつとき（$a^2 - 4b > 0$ のとき）	$\{ e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x} \}$
．相異なる２虚数解 $\lambda = p \pm qi$ (p, q は実数) をもつとき（$a^2 - 4b < 0$ のとき）	$\{ e^{(p+iq)x}, e^{(p-iq)x} \}$ または $\{ e^{px}\cos qx, e^{px}\sin qx \}$(実数形) [‡]
．重解 λ_0 をもつとき（$a^2 - 4b = 0$ のとき）	$\{ e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x} \}$

- **非同次**の

$$y'' + ay' + by = r(x) \tag{2.2}$$

の場合，とにかく１つの特殊解 $A(x)$ さえ見つければ，一般解がわかる．

$A(x)$ の見つけ方としては，１階の場合と同様の**定数変化法**があり，原理的には必ず見つけることができるが，計算がかなり手間である．

$r(x)$ が**特殊な形をしている場合**には，もう少し簡単な**未定係数法**がある．

- **定数変化法**.　非同次方程式 (2.2) に対して，まず対応する同次方程式 (2.1) の一般解 $y = C_1F(x) + C_2G(x)$ を求める．これに対応して，(2.2) の解を

$$y = uF(x) + vG(x) \tag{2.3}$$

の形で求める (u, v を求める).

(2.3) を微分すると，$y' = u'F(x) + uF'(x) + v'G(x) + vG'(x)$ となるが，ここで，$u'(x)$, $v'(x)$ がからむ部分について

$$\boxed{u'F(x) + v'G(x) = 0} \tag{2.4}$$

[†]関数 $y = e^{\lambda x}$ は，微分するという作用 D に対して極めて単純な変化: $D[y] = \lambda y$ をする関数であり，フーリエ解析やラプラス解析などでも重要な働きをする関数である．

[‡]$e^{(p\pm iq)x} = e^{px}\cos qx \pm ie^{px}\sin qx$ なので，$C_1e^{(p+iq)x} + C_2e^{(p-iq)x} = (C_1+C_2)e^{px}\cos qx + i(C_1 - C_2)e^{px}\sin qx = C_1'e^{px}\cos qx + C_2'e^{px}\sin qx$ に注意.

という**余分な条件を設定するところがミソ**．このとき

$$y' = uF'(x) + vG'(x)$$

となるので，これをさらに微分して，

$$y'' = u'F'(x) + uF''(x) + v'G'(x) + vG''(x)$$

となる（余分な条件 (2.4) を設定したおかげで u'', v'' が出てこないことに注意）．これらを (2.2) に代入して $F''(x)+aF'(x)+bF(x) = G''(x)+aG'(x)+bG(x) = 0$ を使うと，u, v のからむ項は必ずキャンセルして，

$$\boxed{u'F'(x) + v'G'(x) = r(x)} \tag{2.5}$$

となる．

(2.4) と (2.5) から，連立１次方程式を解いて，u', v' が求まる．具体的に計算すると，

$$u' = \frac{-r(x)G(x)}{W(x)}, \qquad v' = \frac{r(x)F(x)}{W(x)}. \tag{2.6}$$

ここで，$W(x) := F(x)G'(x) - F'(x)G(x) = \begin{vmatrix} F(x) & G(x) \\ F'(x) & G'(x) \end{vmatrix}$. この $W(x)$ は，$F(x)$ と $G(x)$ の**ロンスキアン**または**ロンスキ行列式**と呼ばれる[§)]．(2.6) を積分すると，u, v が求まり，y が求まる．

以上をまとめて公式にすると，

$$y = F(x)\int \frac{-r(x)G(x)}{W(x)}dx + G(x)\int \frac{r(x)F(x)}{W(x)}dx$$

となる．積分に積分定数を入れると一般解が求まる．

例： $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$. 同次方程式を解くと，特性方程式は $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda = \pm i$ ゆえ，$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. そこで，$y = u\cos x + v\sin x$ の形で特殊解を求めよう．

$y' = u'\cos x - u\sin x + v'\sin x + v\cos x$ となる．ここで，

$$u'\cos x + v'\sin x = 0 \text{ —— } (1)$$

[§)] $\{F(x), G(x)\}$ が (2.1) の基本解系であれば，必ず $W(x) \neq 0$ であることがわかっている．

とすると，$y' = -u\sin x + v\cos x$. これより，$y'' = -u'\sin x - u\cos x + v'\cos x - v\sin x = -u'\sin x + v'\cos x - y$. したがって，

$$-u'\sin x + v'\cos x = \frac{1}{\cos x} \text{ —— } (2)$$

このように，必ず，u, v は消えて，u', v' のみが残る．

(1), (2) より，$u' = -\dfrac{\sin x}{\cos x}, v' = 1$ となる.（このように必ず u', v' が求まり，積分するだけで u, v が求まる.）これを積分すれば，$u = \log|\cos x| + C_1, v = x + C_2$. すなわち，一般解は，$y = (\cos x)\log|\cos x| + x\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x$.

- **未定係数法**. $r(x)$ が次のような特殊な形の時は，解の形を決めてしまうことで，特殊解が求まる場合がある．これは，１階線型方程式でも定数係数なら使える方法である．

  i) $r(x) = Ae^{px}$ のとき，$y = ke^{px}$ の形の解を探す.（k を決める.）

  ii) $r(x) =$[n 次式] のとき，$y =$[n 次式] の形の解を探す.（n 次式の係数を決める.）

  iii) $r(x) = e^{px}(A\sin qx + B\cos qx)$ のとき，$y = e^{px}(k\sin qx + l\cos qx)$ の形で探す.（k, l を決める.）たとえ $r(x)$ が cos,sin の一方のみでも，解は両方入った形で探す.

  iv) 上記の形の関数の和の場合は，それぞれ対応する形の和の形で求めればよい.（別々に求めて足してもよい.）

いずれも，うまくいかない場合もある．特性方程式の解が，i) では $\lambda = p$, ii) では $\lambda = 0$，iii) では $\lambda = p + \pm iq$，になっている場合，うまくいかない．この場合は，さらに x または x^2 をかけた形にするとうまくいく．詳細・例などは TEXTp.100–101 を参照.

例： $y'' - 3y' + 2y = 4x + e^{3x}$.

$y = kx + l + me^{3x}$ の形で１つの解（特殊解）を求めよう．$y' = k + 3me^{3x}$, $y'' = 9me^{3x}$ ゆえ，$9me^{3x} - 3k - 9me^{3x} + 2kx + 2l + 2me^{3x} = 4x + e^{3x}$. ゆえに，$2m = 1, 2k = 4, -3k + 2l = 0$. これより，$m = \dfrac{1}{2}, k = 2, l = 3$. すなわち，$y = 2x + 3 + \dfrac{1}{2}e^{3x}$. （一般解は，$y = 2x + 3 + \dfrac{1}{2}e^{3x} + C_1e^x + C_2e^{2x}$.）

$y'' - 3y' + 2y = 4x$ の特殊解 $y = 2x + 3$ と，$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$ の特殊解 $y = \dfrac{1}{2}e^{3x}$ を別々に求めて，足してもよい.

以上.

第 7 回　二階非斉次常微分方程式の解法 (続き)

[教科書 2.8〜2.10]

今回の内容：

- 復習: 二階非斉次方程式の解の性質
- 特解の構成法 (未定係数法)
- 一般的な解法 (定数変化法)

7.1　復習: 二階非斉次方程式の解

$$y'' + a\,y' + b\,y = r(x) \qquad (a, b: \text{定数}) \tag{7.1}$$

は、$y(x)$ について 1 次以外の項を持つ**非斉次**微分方程式である。この方程式の解は次で与えられる。

[非斉次方程式の一般解] = [非斉次方程式の特解] + [斉次方程式の一般解 (2 つの定数を含む)]

この性質の説明については前回の講義ノートを参照すること。

非斉次方程式 (7.1) の解法

1. 非斉次方程式 (7.1) を満たす解 (**特解**) $y = y_*(x)$ を一つ見つける。
$$y_*'' + a\,y_*' + b\,y_* = r(x)\ . \tag{7.2}$$
2. 式 (7.1) に対応する**斉次方程式**の一般解を求める。
$$y'' + a\,y' + b\,y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2 \quad (C_1, C_2: \text{定数}) \tag{7.3}$$
3. 非斉次方程式 (7.1) の一般解は、特解 (7.2) と斉次方程式の一般解 (7.3) の和で与えられる。
$$y(x) = y_*(x) + C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2 \qquad (C_1, C_2: \text{定数}) \tag{7.4}$$

7.2　特解の構成法 (未定係数法)

非斉次方程式の一般解を求める問題は、その**非斉次方程式の特解**さえ構成できれば、あとは前回までに学んできた斉次方程式の一般解を求める問題に帰着する。

特解を求めるための一般的な公式は次の節で学ぶが、やや複雑で使いづらい。一方、微分方程式が比較的簡単な場合には、この公式を使わずとも特解を求められる場合がある。そのための方法 (**未定係数法**) をこの節で解説する。

どの場合についても、**方程式 (7.1) の右辺** $r(x)$ **の関数形に応じて特解** $y = y(x)$ **の関数形を予想し**、その係数をうまく調節することで特解を求める。

- **右辺が指数関数 (**$r(x) \propto e^{\alpha x}$**)**　$\Rightarrow$　$y = K\,e^{\alpha x}$ **(**K**: 定数)**

  方程式の右辺 (7.1) が指数関数 $r(x) \propto e^{\alpha x}$ となる時には、それに合わせて特解の形を $e^{\alpha x}$ の定数倍にとってみる。係数 K は、方程式 (7.1) が満たされるように調節する。

例） 次の非斉次方程式の特解を求める。

$$y'' + y' + y = e^{2x} \tag{7.5}$$

右辺の形に合わせて、特解の形を

$$y(x) = K\, e^{2x} \qquad (C : \text{定数}) \tag{7.6}$$

と仮定し、式 (7.5) に代入してみる。すると

$$\left(K\, e^{2x}\right)'' + \left(K\, e^{2x}\right)' + K\, e^{2x} = 4K\, e^{2x} + 2K\, e^{2x} + K\, e^{2x} = 7K\, e^{2x} = e^{2x} \ . \tag{7.7}$$

これが満たされるためには $K = 1/7$ であればよい。したがって、式 (7.5) の特解は

$$y(x) = K\, e^{2x} = \frac{1}{7} e^{2x} \ . \tag{7.8}$$

非斉次方程式 (7.5) の一般解をさらに求めるためには、対応する斉次方程式の一般解を求めて特解に足せばよい。まず、式 (7.5) に対応する斉次方程式は

$$y'' + y' + y = 0 \ . \tag{7.9}$$

この方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\, i \ . \tag{7.10}$$

したがって、斉次方程式 (7.9) の一般解は

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) \right] \qquad (C_1, C_2 : \text{定数}) \tag{7.11}$$

で与えられる。

非斉次方程式 (7.5) の一般解は、この式の特解 (7.8) と、斉次方程式 (7.9) の特解 (7.11) の和を取ることで得られる。

$$y(x) = \frac{1}{7} e^{2x} + e^{-\frac{1}{2}x} \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) \right] \qquad (C_1, C_2 : \text{定数}) \ . \tag{7.12}$$

- **右辺がべき関数 ($r(x) \propto x^n \ (n = 0, 1, \ldots)$) $\Rightarrow$ $y = K_0 + K_1\, x + \cdots + K_n\, x^n$ ($K_{0,1,\ldots,n}$: 定数)**

右辺がべき関数 $r(x) = x^n$ で与えられるとき、特解としては x^n を最高次の項として持つ x の多項式を持ってくる。

例） 次の非斉次方程式の特解を求める。

$$y'' + y' + y = x^2 \tag{7.13}$$

この場合には、特解を次の形に仮定する。

$$y(x) = K_0 + K_1\, x + K_2\, x^2 \qquad (K_{0,1,2} : \text{定数}) \tag{7.14}$$

これを式 (7.13) に代入すると

$$\begin{aligned}
&\left(K_0 + K_1\, x + K_2\, x^2\right)'' + \left(K_0 + K_1\, x + K_2\, x^2\right)' + \left(K_0 + K_1\, x + K_2\, x^2\right) \\
&= 2K_2 + (K_1 + 2K_2\, x) + \left(K_0 + K_1\, x + K_2\, x^2\right) \\
&= 2K_2 + K_1 + K_0 + (2K_2 + K_1)\, x + K_2\, x^2 \\
&= x^2 \ .
\end{aligned} \tag{7.15}$$

この式が満たされるためには

$$2K_2 + K_1 + K_0 = 0\,, \quad 2K_2 + K_1 = 0\,, \quad K_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad K_2 = 1\,, \quad K_1 = -2\,, \quad K_0 = 0\ . \tag{7.16}$$

したがって、方程式 (7.13) の特解は

$$y(x) = K_0 + K_1\,x + K_2\,x^2 = -2x + x^2\ . \tag{7.17}$$

- **右辺が三角関数 ($r(x) \propto \sin(kx), \cos(kx)$)　$\Rightarrow$　$y = K_1\cos(kx) + K_2\sin(kx)$ (K_1, K_2: 定数)**

  例）次の非斉次方程式の特解を求める。

$$y'' + y' + y = \sin(2x) \tag{7.18}$$

  この場合には、特解を次の形に仮定する。

$$y(x) = K_1\cos(2x) + K_2\sin(2x) \qquad (K_{1,2} : \text{定数}) \tag{7.19}$$

  これを式 (7.18) に代入すると

$$\begin{aligned}
&[K_1\cos(2x) + K_2\sin(2x)]'' + [K_1\cos(2x) + K_2\sin(2x)]' + [K_1\cos(2x) + K_2\sin(2x)] \\
&= [-4K_1\cos(2x) - 4K_2\sin(2x)] + [-2K_1\sin(2x) + 2K_2\cos(2x)] + K_1\cos(2x) + K_2\sin(2x) \\
&= (-3K_1 + 2K_2)\cos(2x) + (-2K_1 - 3K_2)\sin(2x) \\
&= \sin(2x)
\end{aligned} \tag{7.20}$$

  この式が満たされるためには

$$-3K_1 + 2K_2 = 0\,, \quad -2K_1 - 3K_2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad K_1 = -\frac{2}{13}\,, \quad K_2 = -\frac{3}{13}\,. \tag{7.21}$$

  したがって、式 (7.18) の特解は

$$y(x) = K_1\cos(2x) + K_2\sin(2x) = -\frac{2}{13}\cos(2x) - \frac{3}{13}\sin(2x)\ . \tag{7.22}$$

注意点)

- **上記の方法がうまくいくのは、特解の形を正しく仮定できたときだけである。**間違った関数形を仮定してしまった場合には、係数をどう選んでも両辺が (恒等的には) 等しくならず、特解も求まらないので注意すること。

- $r(x)$ の関数形が以上で扱った例の和となっている場合には、以上で用いた特解の関数形の和をとって計算するとうまくいく。

  例）$y'' + y' + 1 = e^x + x^2$ の特解を求めるとする。

  この場合には、特解の形を $y(x) = K\,e^x + K_0 + K_1x + K_2x^2$ ($K, K_{0,1,2}$: 定数) と仮定する。途中計算は省略するが、この $y(x)$ を $y'' + y' + 1 = e^x + x^2$ に代入して両辺を比較することで、$K = 1/7, K_2 = 1, K_1 = -2, K_0 = 0$ が得られる。この結果を $y(x) = K\,e^x + K_0 + K_1x + K_2x^2$ に代入することで、特解が $y(x) = \frac{1}{7}e^x - 2x + x^2$ と得られる。

  計算中に仮定した特解の形も、最終的に得られた特解も、全て上記で解説した例に出てくる特解の和を取ったものになっていることに注意する。

- 非斉次方程式によっては、上記の計算法で仮定する特解が、斉次方程式方程式の解 (7.3) と一致してしまう場合がある。この場合には、上記の方法で用意する特解の候補に x をかけたものを代わりに使う。

  例）$r(x) = e^x$ で、e^x が斉次方程式の解の一つと一致　$\Rightarrow$　特解の形を $r(x) = C\,x\,e^x$ と仮定

- さらに例外的な場合として、斉次方程式の特性方程式が重解を持ち、その重解に対応する斉次方程式の解と $r(x)$ が一致してしまう場合もある。この場合には、上述の特解の候補に x^2 をかけたものを代わりに使うとうまくいく。

  例）$y'' - 2y' + 1 = e^x$ の一般解を求めるとする。

  この式に対応する斉次方程式は $y'' - 2y' + 1 = 0$ で、その特性方程式を解くと $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \lambda = 1$ (重解) となる t。したがって、この場合の斉次方程式の一般解は $y(x) = (C_0 + C_1\,x)\,e^{\lambda x}$ である。一方、元の非斉次方程式の特解を求めるために、**特解の形を** $y(x) = C\,x^2 e^x$ **(**C**: 定数) と仮定**して代入すると

  $$\left(Cx^2e^x\right)'' - 2\left(Cx^2e^x\right)' + Cx^2e^x = \cdots = 2Ce^x = e^x \qquad \therefore\;\; C = \frac{1}{2}$$

  となり、$y(x) = C\,x^2e^x = \frac{1}{2}x^2e^x$ が非斉次方程式 $y'' - 2y' + 1 = e^x$ の特解として得られる。

7.3 一般的な解法 (定数変化法)

前節の方法は、非斉次項 $r(x)$ が比較的単純で、特解の関数形を事前に予測できる場合にしか使えない。一方、**定数変化法**を使うことで、任意の関数 $r(x)$ に対して非斉次方程式 (7.1) の特解を求めるための公式を作ることができる。

ただし、**できる限り前節の方法を使った方が簡単に特解を求められる**ので注意すること。

非斉次方程式 (7.1) の特解の公式

$$y(x) = -\left(\int_{x_1}^{x} \frac{y_2(\hat{x})r(\hat{x})}{W(\hat{x})}d\hat{x}\right)y_1(x) + \left(\int_{x_2}^{x} \frac{y_1(\hat{x})r(\hat{x})}{W(\hat{x})}d\hat{x}\right)y_2(x) \tag{7.23}$$

ここで、

- $y_1(x), y_2(x)$: 式 (7.1) に対応する斉次方程式 $(y'' + ay' + by = 0)$ の、互いに独立な解
- x_1, x_2: 任意の定数
- $W(x)$ は以下で定義される x の関数 (**ロンスキアン**と呼ばれる)

$$W(x) \equiv y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \tag{7.24}$$

($\because$) 公式 (7.23) を得るためには、非斉次方程式 (7.1) の特解 $y(x)$ をあえて次の形に書き表すところから計算をスタートする。

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{7.25}$$

ただし、$C_1(x), C_2(x)$ は任意関数で、方程式 (7.1) が満たされるように決める。

この式は単に、未知関数 $r(x)$ を別の未知関数 $C_1(x), C_2(x)$ で書き換えているに過ぎない。さらに、特解 $y(x)$ を書き換えるだけなら未知関数が 1 つだけあれば十分である。そこで、2 つの未知関数 $C_1(x), C_2(x)$ を結びつける関係式 (7.27) を後ほど導入し、未知関数の個数を減らすことにする。

特解を求めるためには、上記の $y(x)$ を非斉次方程式 (7.1) に代入して、式が満たされるように $C_1(x)$, $C_2(x)$ を決めればよい。そのために、まず $y'(x)$ を計算すると

$$y'(x) = (C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x))' = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2 + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\;. \tag{7.26}$$

以下の計算では未知関数 $C_1(x), C_2(x)$ を求めていくことになるが、その際に C_1, C_2 の微分項がなるべく少ない方が計算が簡単になる。そこで、$C_1(x), C_2(x)$ が次の関係式を満たすと仮定する:

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0\;. \tag{7.27}$$

こう仮定すると、$C_1(x)$ と $C_2(x)$ のどちらかを決めればもう一方が決まるため、式 (7.25) の右辺に含まれる未知関数の個数が実質的に一つになる。

仮定 (7.27) を課すと、$y'(x)$ の表式は

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) \ . \tag{7.28}$$

このとき、$y''(x)$ は

$$y''(x) = \big(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\big)' = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) \ . \tag{7.29}$$

式 (7.28), (7.29) より、式 (7.25) の $y(x)$ を非斉次方程式 (7.1) に代入したものは

$$\begin{aligned} r(x) = y'' + ay' + by &= C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2'' + a\left(C_1y_1' + C_2y_2'\right) + C_1y_1 + C_2y_2 \\ &= C_1\left(y_1'' + ay_1' + by_1\right) + C_2\left(y_2'' + ay_2' + by_2\right) + C_1'y_1' + C_2'y_2' \\ &= C_1'y_1' + C_2'y_2' \end{aligned}$$

$$\therefore \quad C_1'y_1' + C_2'y_2' = r(x) \qquad \left(\text{ただし } C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0\right) \ . \tag{7.30}$$

あとは、式 (7.30) を解いて $C_1(x), C_2(x)$ を決めればよい。まず、(7.30) の 2 つの式を組み合わせて $C_1(x)$ だけの式を作る。$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$ より、$C_2' = -(y_1/y_2)C_1'$ と書き換えられるので

$$r(x) = C_1'y_1' + C_2'y_2' = C_1'y_1' - \frac{y_1}{y_2}C_1' \cdot y_2' = \frac{y_1'y_2 - y_1y_2'}{y_2}C_1' = -\frac{W(x)}{y_2(x)}C_1'(x) \tag{7.31}$$

$$\therefore \quad C_1'(x) = -\frac{y_2(x)r(x)}{W(x)} \qquad \Rightarrow \qquad C_1(x) = -\int_{x_1}^{x} \frac{y_2(\hat{x})r(\hat{x})}{W(\hat{x})}d\hat{x} \ . \tag{7.32}$$

ただし、x_1 は任意の定数で、$C_1'(x)$ の式を積分する際に生じる積分定数に相当する。また、式を単純化するために、式 (7.24) で定義されるロンスキアン $W(x)$ を用いた。

同様に、$C_2(x)$ だけの式を作って積分すると

$$C_2'(x) = \frac{y_1(x)r(x)}{W(x)} \qquad \Rightarrow \qquad C_2(x) = \int_{x_2}^{x} \frac{y_1(\hat{x})r(\hat{x})}{W(\hat{x})}d\hat{x} \ . \tag{7.33}$$

先ほどと同様、x_2 は任意の定数である。

式 (7.32), (7.33) を最初に仮定した特解の表式 (7.25) に代入して、公式 (7.23) を得る。