

2018 神大数学 第3問：確率【模範解答】

問1 $(*)$ が $x = 1$ を解にもつ確率を求めよ。

$x = 1$ を解にもつので、 $(*)$ に代入すると、

$$b = a - 1$$

これを満たす (a, b) の数は、

$$(a, b) = (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$$

また、 b を和とする場合の数は、

(i) $b = 2$ のとき $(1, 1)$ の 1 通り

(ii) $b = 3$ のとき $(1, 2), (2, 1)$ の 2 通り

(iii) $b = 4$ のとき $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ の 3 通り

(iv) $b = 5$ のとき $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$ の 4 通り

以上、(i) ~ (iv) より、 $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ 通り

よって、 $(*)$ が $x = 1$ を解にもつ確率 P_1 は、

$$P_1 = \frac{10}{6^3} = \frac{5}{108}$$

問2 $(*)$ が整数を解にもつとする。このとき $(*)$ の解は共に正の整数であり、

また少なくとも 1 つの解は 3 以下であることを示せ。

まず、 $(*)$ の解は共に正の整数であることを示す。

$(*)$ が整数解 $x = \alpha, \beta$ ($\alpha > 3, \beta > 3$) を持つと仮定すると、

2 次方程式の解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = a > 0, \alpha\beta = b > 0$

よって、 $(*)$ の解は共に正の整数である。■

また、少なくとも 1 つの解は 3 以下であることを、背理法により示す。

(*) が整数解 $x = \alpha, \beta$ ($\alpha > 3, \beta > 3$) を持つと仮定すると、

これは、サイコロの出目の値が α であることに矛盾する。

よって、(*) の解は少なくとも 1 つの解は 3 以下であることが示された。■

問3 (*) が整数を解にもつ確率を求めよ。

問2 より、候補となる (α, β) は、

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) &= (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5) \\&= (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4) \\&= (3, 1), (3, 2), (3, 3) \\&= (4, 1), (4, 2) \\&= (5, 1)\end{aligned}$$

よって、候補となる (a, b) は、

$$\begin{aligned}(a, b) &= (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5) \\&= \cancel{(3, 2)}, (4, 4), (5, 6), (6, 8) \\&= \cancel{(4, 3)}, \cancel{(5, 6)}, (6, 9) \\&= \cancel{(5, 4)}, \cancel{(6, 8)} \\&= \cancel{(6, 5)}\end{aligned}$$

また、 b を和とする場合の数は、 $b = 2, 3, 4, 5$ の場合は、問1 で求めた結果を利用して、

(v) $b = 6$ のとき $(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ の 5 通り

(vi) $b = 8$ のとき $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$ の 5 通り

(vii) $b = 9$ のとき $(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$ の 4 通り

以上より、 $1 + 2 + 3 \times 2 + 4 + 5 + 5 + 4 = 27$ 通り

したがって、(*) が整数を解にもつ確率 P_2 は、

$$P_2 = \frac{27}{6^3} = \frac{1}{8}$$

※ 2019 年度のように表をえがいてもよい。今回は表を書かずに列挙でやってみた。