

2023 神大数学 第3問：確率【模範解答】

問1 この袋から同時に2枚のカードを取り出したとき、

そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ。

袋の中に含まれるカードのうち、奇数・偶数ともに n 枚である。

2枚取り出すとき、その和が偶数となるには、以下のどちらかの条件を満たす必要がある。

① 2枚とも偶数 ② 2枚とも奇数

よって、求める確率 P_1 は、

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{{}_nC_2}{{}_n C_2} + \frac{{}_nC_2}{{}_n C_2} \\ &= 2 \cdot \frac{{}_nC_2}{{}_n C_2} = 2 \cdot \frac{\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}}{\frac{2n(2n-1)}{2 \cdot 1}} = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} \\ &\therefore P_1 = \frac{n-1}{2n-1} \end{aligned}$$

問2 この袋から同時に3枚のカードを取り出したとき、

そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ。

3枚取り出すとき、その和が偶数となるには、以下のどちらかの条件を満たす必要がある。

① 3枚とも偶数 ② 2枚奇数、1枚偶数

(※条件①は $n \geq 3$ においてのみ考える)

$n = 2$ のとき、求める確率 P_2 は、条件②を考えると、

$$P_2 = \frac{{}_2C_2 \times {}_2C_1}{{}_4C_3} = \frac{1 \times 2}{4} = \frac{1}{2}$$

また、 $n \geq 3$ において、求める確率 P_2 は、条件①と条件②を考えると、

$$\begin{aligned}
 P_2 &= \frac{{}_n C_3}{{}_{2n} C_3} + \frac{{}_n C_2 \times {}_n C_1}{{}_{2n} C_3} \\
 &= \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}} + \frac{\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} \times n}{\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{n(n-1)(n-2) + 3n(n-1)n}{2n(2n-1)(2n-2)} \\
 &\quad \therefore P_2 = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

(これは $n = 2$ も含む)

問3 この袋から同時に2枚のカードを取り出したとき、

そのカードに書かれている数の和が $2n + 1$ 以上である確率を求めよ。

取り出したカードに書かれている数の小さい方の数を x とする。

また、もう一方のカード（つまり大きい方の数）を y とすると、

以下の組み合わせが考えられる。

x	y	個数
1	$2n$	1
2	$2n-1, 2n$	2
3	$2n-2, 2n-1, 2n$	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$n+1, n+2, \dots, 2n$	n
$n+1$	$n+2, \dots, 2n$	$n-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2n-1$	$2n$	1

よって、個数の合計は、

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n-1) + \dots + 1 &= \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^{n-1} k \\
 &= \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}n(n-1) = n^2
 \end{aligned}$$

したがって、求める確率 P_3 は、

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{n^2}{{}_{2n}C_2} \\ &= \frac{n^2}{\frac{2n(2n-1)}{2 \cdot 1}} = \frac{n^2}{n(2n-1)} \end{aligned}$$

$$\therefore P_3 = \frac{n}{2n-1}$$

【別解】 格子点の数を数える別解もあるけど、、ムズイ。

取り出した2枚のカードに書かれている数を x, y ($x < y$) とすると、

満たすべき条件は $1 \leq x < y \leq 2n$ かつ $x + y \geq 2n + 1$ となる。

これを満たす格子点 (x, y) の個数を求めればよいので、領域として図示して数える。

格子点の個数は、

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \{2k - (2n + 1)\} = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

以下、本解と同じ。