

Answer

GUI

2024 年 4 月 24 日

問題

留数定理を用いて解く広義積分の問題

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^4 + 1)} \quad (1)$$

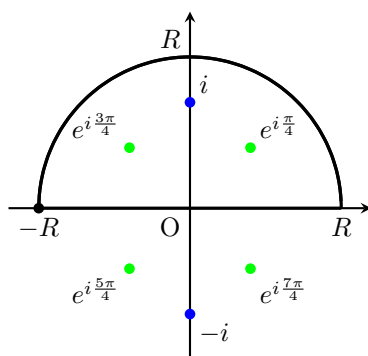
解答

次のような複素積分を考える.

$$\int_C \frac{dz}{(z^2 + 1)(z^4 + 1)} \quad (2)$$

積分路 C は $(-R, 0)$ から反時計回りに半円を描く (下図). ここで, $R > 1$ とした.

閉曲線の中の孤立特異点における留数を考えていく. また, 各特異点は 1 位の極である.



C 内の各特異点における留数は, それぞれ次式となる.

$$\text{Res}(e^{i\pi/4}) = \frac{-1 - i}{4\sqrt{2}} \quad (3)$$

$$\text{Res}(e^{i3\pi/4}) = \frac{1 - i}{4\sqrt{2}} \quad (4)$$

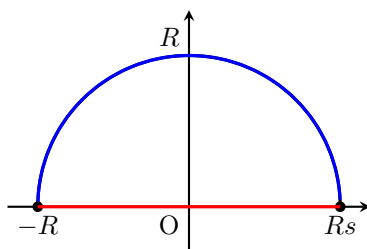
$$\text{Res}(i) = \frac{-i}{4} \quad (5)$$

よって、留数定理より、

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^4+1)} = 2\pi i [\text{Res}(e^{i\frac{\pi}{4}}) + \text{Res}(e^{i\frac{3\pi}{4}}) + \text{Res}(i)] = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi \quad (6)$$

(まだ、これが求める答えではない)

また、 C を $(-R, 0)$ から $(R, 0)$ までを結ぶ直線の経路 C_L (下図赤線) と、
 $(R, 0)$ から $(-R, 0)$ までを半時計回りに結ぶ円弧の経路 C_R (下図青線) に分ける。



複素積分は次式となる。

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^4+1)} = \int_{C_L} \frac{dz}{(z^2+1)(z^4+1)} + \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2+1)(z^4+1)} \quad (7)$$

このようにすることで、極限 $R \rightarrow \infty$ をとったとき、右辺第1項が与式(1)に一致する。

このとき、右辺第2項が0に収束することを証明すれば、式(6)の値が与式(1)に一致することが示される。
 簡単のため、右辺第2項の絶対値の値を評価していく。

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2+1)(z^4+1)} \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{1}{(z^2+1)(z^4+1)} \right| |dz| \quad (8)$$

三角不等式 $|z^2+1| \geq |z|^2-1$, $|z^4+1| \geq |z|^4-1$ を用いる。

$$\int_{C_R} \left| \frac{1}{(z^2+1)(z^4+1)} \right| |dz| \leq \int_{C_R} \frac{1}{(|z|^2-1)(|z|^4-1)} |dz| = \frac{1}{(R^2-1)(R^4-1)} \pi R \quad (9)$$

よって、

$$0 \leq \left| \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2+1)(z^4+1)} \right| \leq \frac{1}{(R^2-1)(R^4-1)} \pi R \quad (10)$$

はさみうちの定理より、式(7)の右辺第2項の値は $R \rightarrow \infty$ において、0に収束することがわかる。

したがって、求める広義積分式(1)は、式(6)で求めた値となる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^4+1)} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi \quad (11)$$

以上。